Théorème de Rolle - Formules de Taylor

Leçon 12
EN1D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Dans cette leçon, on donne une démonstration du théorème de Rolle et on aborde les diverses formules de Taylor dans un but purement pratique. La théorie est réduite au minimum.

Table des matières

I Théorème de Rolle

Proposition 12.1 *Si une fonction f est dérivable sur $]a,b[$ et si f admet un extremum en $c \in]a,b[$, alors $f'(c) = 0$.*

Démonstration: Admettons que f admet un minimum en c (on laisse l'analogie du maximum au lecteur). On cherche la limite du taux d'accroissement $\tau_{f,c}(h) = \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ quand h tend vers 0.

Si $h > 0$, alors $\tau_{f,c}(h) > 0$ (car $f(c+h) > f(c)$ en tant que minimum).

Et si $h < 0$, alors $\tau_{f,c}(h) < 0$ (pour la même raison).

Or f est dérivable en c, ce qui veut dire que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \tau_{f,c}(h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \tau_{f,c}(h) = f'(c)$. Mais la première limite est positive et la seconde est négative. Donc $f'(c) = 0$.

□

Théorème 12.2 *(Théorème de Rolle) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $\boxed{f'(c) = 0}$.

Démonstration: Si f est constante, n'importe quelle valeur entre a et b convient.

Sinon, f possède un maximum M et un minimum m sur $[a,b]$ (utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass), et parmi ces deux nombres, l'un au moins est distinct de $f(a)$. Il y a donc un $c \in]a,b[$ tel que f admette en c un extremum global et a fortiori, un extremum local. D'après la proposition précédente, on a alors $f'(c) = 0$.

□

Exemple: Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable (avec $n \geq 2$). Posons $f(x) = x^n(1-x)^n g(x)$. La fonction f est n fois dérivable par récurrence, on trouve $f^{(k)}(x) = x^{n-k}(1-x)^{n-k}g_k(x)$ pour $0 \leq k \leq n$, avec $g_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction $n-k$ fois dérivable.

Le théorème de Rolle montre que g_1 s'annule au moins une fois dans $]0,1[$. En supposant que si $1 \leq k \leq n-1$, on a g_k qui s'annule en au moins k points $x_{k,1}$, $x_{k,2}$, ..., $x_{k,k}$ de $]0,1[$ tels que $0 < x_{k,1} < x_{k,2} < \cdots < x_{k,k} < 1$. Le théorème de Rolle appliqué à $f^{(k)}$ sur chacun des intervalles $[0, x_{k,1}]$, $[x_{k,1}, x_{k,2}]$, ..., $[x_{k,k}, 1]$ montre que $f^(k+1)$ admet au moins un zéro à l'intérieur de chacun de ces intervalles. Et donc g_{k+1} s'annule en au moins $k+1$ points de $]0,1[$. Par récurrence, il en résulte que g_n s'annule au moins n fois dans $]0,1[$ avec $g_n = f^{(n)}$.

II Notations de Landau

On étend les notations de Landau déjà vues pour les suites de façon naturelle :

Définition 12.3 *Soient f et g deux fonctions définies localement en un réel a. On dit que $f = o(g)$ au voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert contenant a et une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et*

$$\boxed{f(x) = \varepsilon(x)g(x)} \text{ dans le voisinage en question.}$$

De même,

Définition 12.4 *Avec les mêmes hypothèses, on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a et on note $f \sim g$ s'il existe α une fonction telle $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$ et*

$$\boxed{f(x) = \alpha(x)g(x)}.$$

Tout fonctionne exactement comme dans le cas des suites, la seule nuance étant qu'il faut préciser en quel réel on se place pour écrire l'équivalent.

III Les polynômes de Taylor

On connait déjà la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et son interprétation en terme de développement limité à l'ordre 1 en a. On rappelle la définition

Définition 12.5 *Soit f une fonction définie sur I et soit $a \in I$. La fonction f est dite **dérivable en** a de dérivée $f'(a)$ si et seulement si la sorite suivante est vérifiée :*

i. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ *limite finie.*

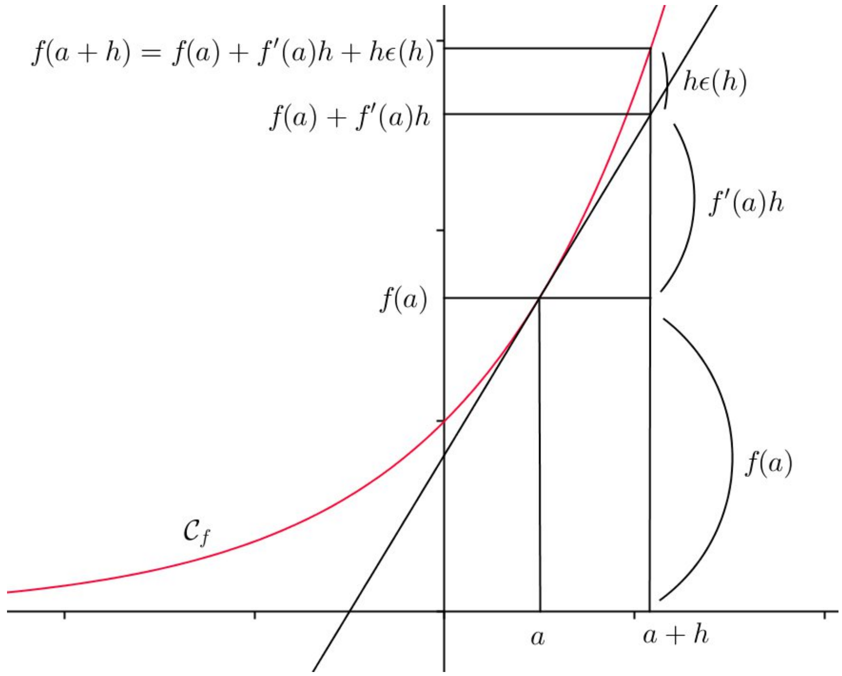
ii. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ *limite finie.*

iii. Il existe ε une fonction telle $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ pour lesquels $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

iv. $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.

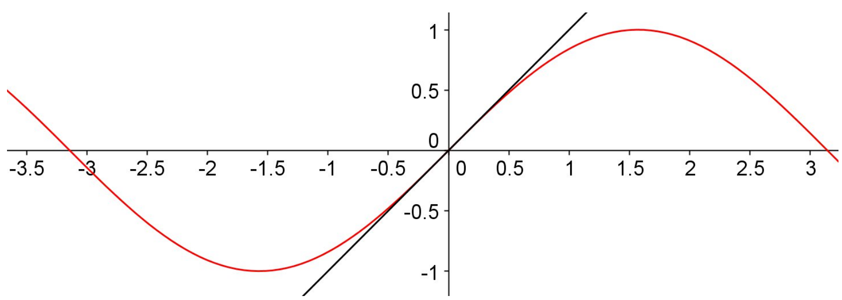
Remarque: On a rajouté l'expression en terme de petit o pour abréger les notations dans la suite de la leçon.

On rappelle le graphique fondateur de la théorie :

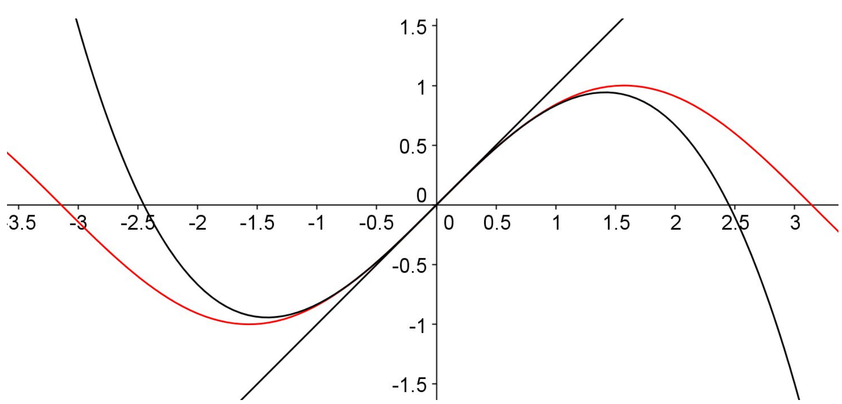


En écrivant cela, on approxime la fonction par une droite localement en a. Et la meilleure approximation affine est bien évidemment la tangente. Mais ne peut-on pas aller plus loin et "coller" un peu plus à la courbe ?

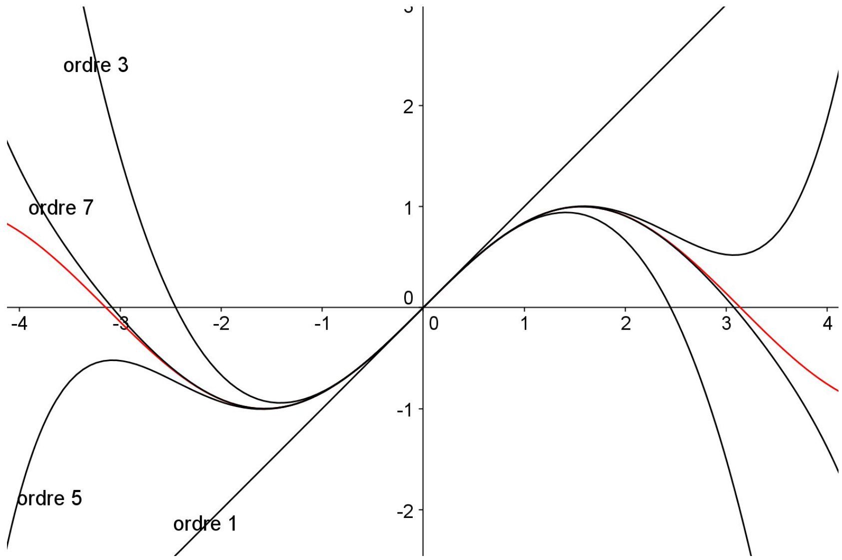
Si l'on étudie la fonction sin localement en 0, on trouve $\sin(h) = 0 + h + o(h)$, ce qui donne le graphique suivant :



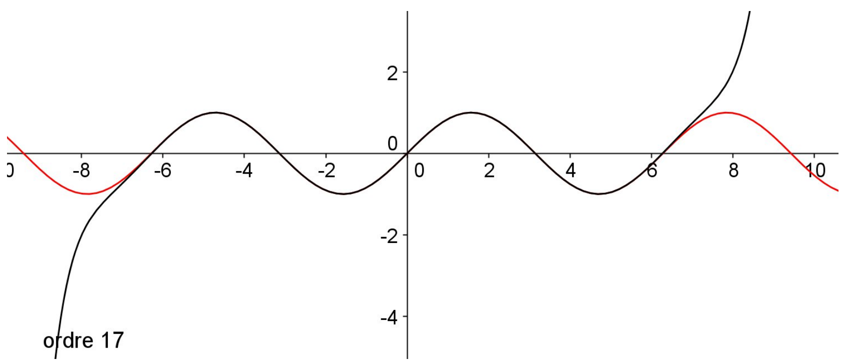
Et si l'on cherche une fonction de degré 2 pour approximer... En fait même il serait plus futé d'essayer de trouver un polynôme de degré 3 quand on considère que la courbe est impaire...



Rien ne nous empèche d'aller à l'ordre 5 ou 7...



et si l'on a du temps, on peut même aller très loin et remarquer que la courbe du polynôme "colle" de plus en plus à celle du sinus mais toujours localement en 0.



Les polynômes précédents sont donnés par la formule suivante :

Définition 12.6 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet une dérivée n^e en un réel a de I. On appelle alors* ***polynôme de Taylor d'ordre*** n ***en*** a *le polynôme*

$$\boxed{T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}.$$

Remarques: • On a $T_{0,f,a}(x)$ qui est constante et vaut $f(a)$.

• La fonction $T_{n,f,a}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que polynôme et $T_{n,f,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ si $k \leq n$ et $T_{n,f,a}^{(k)}(a) = 0$ si $k > n$.

Exemple: Vérifions les jolies dessins qui précèdent : La polynôme de Taylor de la fonction sin en 0 s'obtient donc en appliquant la formule qui nécessite de calculer les dérivées successives : $\sin'(x) = \cos(x)$, $\sin''(x) = -\sin(x)$, $\sin^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $\sin^{(4)}(x) = \sin(x)$ et ainsi de suite.

Donc

$$\sin^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad k = 4p \\ \cos x & \text{si} \quad k = 4p+1 \\ -\sin x & \text{si} \quad k = 4p+2 \\ -\cos x & \text{si} \quad k = 4p+3 \end{cases} \quad \text{et } \sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k = 2q \\ (-1)^{q+1} & \text{si} \quad k = 2q+1 \end{cases}.$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned} T_{n,\sin,0}(x) &= \underbrace{\sin(0)}_{0} + \frac{x}{1!}\underbrace{\cos(0)}_{1} + \frac{x^2}{2!}\underbrace{(-\sin(0))}_{0} + \frac{x^3}{3!}\underbrace{(-\cos(0))}_{-1} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\underbrace{\sin^{(n)}(0)}_{(-1)^{q+1}} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m+1}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

avec $n = 2m+1$.

Chacun vérifiera sur sa calculatrice ou sur un grapheur que les polynômes ainsi obtenus donnent bien les approximations tracées précédemment.

Exercice 1.

On pose $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

1) Ecrire $T_{3,f,0}(x)$ (le polynôme de Taylor de f en 0 à l'ordre 3).
2) Conjecturer la formule de $T_{n,f,0}(x)$ et la démontrer.
3) Déterminer le reste $f(x) - T_{n,f,0}(x)$ en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique.
4) Evaluer l'erreur commise quand on remplace $f(0,1)$ par $T_{5,f,0}(0,1)$.

Proposition 12.7 *Soit f une fonction dont le polynôme de Taylor de degré n est $T_{n,f,a}$ en a. Alors le polynôme de Taylor de f' de degré $n-1$ en a est*

$$\boxed{T_{n-1,f',a} = T'_{n,f,a}}.$$

Attention ! Attention à la perte d'un degré !

Exercice 2.
Montrer cette proposition.

Exercice 3.
En déduire $T_{n,\cos,0}(x)$.

Unicité du polynôme de Taylor :

Proposition 12.8 *Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Il n'existe qu'un seul polynôme P_n de degré n tel qu'au voisinage de 0, on ait :*

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n)}.$$

Il s'agit donc du polynôme de Taylor.

Démonstration: On procède par l'absurde, comme d'habitude. S'il existe P_n et Q_n de degré n tels que $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $f(x) = Q_n(x) + o(x^n)$. Il faut montrer que $P_n = Q_n$. On a déjà $P_n(x) - Q_n(x) = o(x^n)$. Ainsi $P_n - Q_n$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0.

On note $R_n(x) = (P_n - Q_n)(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Si $R_n(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0, il existe $\varepsilon(x)$ telle que $R_n(x) = x^n\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. En calculant la limite en 0 de $R_n(x)$, on trouve $a_0 = 0$. Avec un récurrence finie, en divisant par les puissances de x de chaque côté de l'égalité, on trouve que tous les coefficients de R_n sont nuls. Ainsi, $P_n = Q_n$.

□

On en déduit un corollaire qui aide à la recherche de tels polynômes :

Corollaire 12.9 *Une fonction f et ses polynômes de Taylor en 0 ont la même parité.*

Démonstration: Si f est impaire, on sait que $f(0) = 0$. En regardant de plus près la construction de $T_{n,f,a}(x)$, on sait que f' est paire et f'' est impaire et plus généralement, $f^{(k)}$ est impaire quand k est pair. Ainsi, les coefficients de degrés pairs de $T_{n,f,a}$ sont nuls et $T_{n,f,a}$ est impair.

Idem pour les fonctions paires en partant du fait que la dérivée est paire.

□

Remarque: Une conséquence intéressante est que l'on peut souvent gagner un degré dans la polynôme de Taylor sans trop d'effort. En effet, si f est impaire, comme le sinus que nous avons déjà étudié par exemple, alors on sait par exemple que

$$T_{5,\sin,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Mais comme le coefficient du terme de degré 6 est nul du fait de la parité, on a $T_{5,\sin,0} = T_{6,\sin,0}$.

IV Formules de Taylor

On utilise traditionnellement diverses approximation d'une fonction classifiées via les différentes formules de Taylor qui suivent. A noter que la plupart se distinguent par le reste (dernier terme exprimant l'écart entre la fonction et le Polynôme de Taylor).

Théorème 12.10 *(Formule de Taylor-Lagrange) Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}.$$

N.B. : On appelle souvent **partie régulière** du développement de Taylor de f en a le polynôme de Taylor $\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ pour le différencier du **reste** $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ qui peut prendre plusieurs formes comme on peut le voir ci-dessous.

En posant $a = 0$ et $b = x$, on trouve le

Corollaire 12.11 *(Formule de Taylor-Mac-Laurin) Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ de 0 et $n+1$ fois dérivable sur I. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)}.$$

Ou encore,

Corollaire 12.12 *(Formule de Taylor-Young) Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle (non trivial) I et admettant en un réel $a \in I$ une dérivée n^e. Alors*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)}.$$

On a même mieux :

Théorème 12.13 *(Formule de Taylor avec reste intégral) Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\boxed{f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}.$$

En fait, on peut démontrer les autres à partir de celle-ci :

Démonstration: Le résultat se démontre par récurrence : On pose (H_n) : $f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.

Initialisation : On a clairement $f(b)=f(a)+\int_a^b f'(t)dt$, donc (H_0) est vraie.

Hérédité : On suppose (H_n) vraie pour n fixé. On a alors

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

On se concentre sur l'intégrale que l'on intègre par parties en posant
$u'(t)=(b-t)^n \ \Leftarrow\ u(t)=\frac{-(b-t)^{n+1}}{n+1}$ et $v(t)=f^{(n+1)}(t)\ \Rightarrow\ v'(t)=f^{(n+2)}(t)$.
Ces fonctions étant continues, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt &= \frac{1}{n!}\left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+1)}(t)\right]_a^b-\frac{1}{n!}\int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+2)}(t)dt\\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)+\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+2)}(t)dt.\end{aligned}$$

ce qui prouve (H_{n+1}).

Conclusion : La propriété est donc initialisée au rang 0, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout n (dans la mesure où f admet une dérivée n^e).

□

Exercice 4.
Déterminer la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 de la fonction exp en 0.

Exercice 5.
On pose $f(x)=x^4$.
Ecrire la formule de Taylor-Young de f en 0 à l'ordre 5, puis à l'ordre 3.

V Inégalité de Taylor-Lagrange

Une conséquence directe de la formule de Taylor avec reste intégral est l'inégalité de Taylor-Lagrange :

Théorème 12.14 *Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\boxed{\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|}.$$

Démonstration: En effet, il suffit de majorer l'intégrale. Or $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$, donc $|f^{(n+1)}|$ aussi et elle atteint ses bornes sur cet intervalle qui est un fermé borné. Ainsi, le sup existe et on peut majorer le reste intégral par

$$\left|\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| \leq \frac{1}{n!}\int_a^b \left|(b-t)^n f^{(n+1)}(t)\right| dt$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| \leq \frac{\sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{n!}\int_a^b |(b-t)^n|\, dt.$$

Et cette dernière intégrale est calculable et donne $\displaystyle\int_a^b |(b-t)^n|\, dt = \left[\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}$. D'où le résultat en multipliant par la majoration trouvée.

$\square$