$\boxed{\textbf{Feuille d'exercices } n^\circ \mathbf{6}}$

Fonctions de plusieurs variables

EN1D2 Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1. ♪

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2e^{xy}$
2) $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$
3) $h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y+2}}$
4) $k(x,y) = \ln(4-x^2-y^2)$
5) $l(x,y,z) = x^2y^3\sqrt{z}$.

Exercice 2. ♪

On considère les fonctions de production suivantes :

1) $f(K,L) = \sqrt{K}\sqrt{L}$
2) $g(K,L) = 2K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$

où K représente le facteur capital et L le facteur travail.

Calculer les productivités marginales de chaque facteur.

Exercice 3. ♩

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ et tracer les courbes de niveau pour les valeurs de k indiquées.

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}$ avec $k \in \{-1;0\}$,
2) $f(x,y) = \dfrac{xy-x+y}{xy}$ avec $k \in \{1;2\}$,
3) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$ avec $k = 2$,
4) $f(x,y) = x-y-|x-y|$ avec $k \in \mathbb{R}$,

Exercice 4. ♩

La fonction de demande D_A d'un bien A dépend du prix de A mais aussi des prix P_B et P_C des deux autres biens B et C. On a

$$D_A = P_A^{-0,3}P_B^{0,1}P_C^{-0,4}.$$

Calculer les élasticités partielles de la demande de A par rapport aux prix de A, de B et de C.

Exercice 5. ♩

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Elle est dite **homogène** de degré k lorsque pour tout $t > 0$, on a :

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ...x_n).$$

Si f est homogène de degré k, alors on a l'**identité d'Euler** :

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = kf(x_1, ..., x_n).$$

1) Montrer que les fonctions suivantes sont homogènes et vérifier l'identité d'Euler :

a) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
b) $g(x,y,z) = x^2+2yz$
c) $h(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$
d) $\varphi(K,L) = K^\alpha L^\beta$

2) On pose $U(x,y) = \frac{2xy^2}{x+y}$, avec $x > 0$ et $y > 0$.

Montrer que U est homogène de degré 2 et que les dérivées partielles sont homogènes de degré1.

Exercice 6. ♩

Soit l'équation $F(x,y) = x^3 - 3xy + 6y^3 - 4 = 0$.
Calculer la dérivée au point $M_0(1,1)$ de la fonction f définie implicitement à partir de $F(x,y) = 0$.

Exercice 7. ♩

Soit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y - xe^y \end{array}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de niveau 1.
Vérifier que $\mathcal{C}$ passe par le point $M(0,1)$.
Montrer que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de ce point et déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Exercice 8. ♩

On considère la fonction d'utilité définie par :

$$U(x,y) = \frac{xy}{2x+y} \text{ pour } x > 3 \text{ et } y > 0.$$

où x et y représentent les quantités consommées des biens X et Y.
Calculer le taux marginal de substitution de X à Y correspondant à $U = 3$ pour $x = 6$.