Feuille d'exercices $n°$6

Fonctions de plusieurs variables

EN1D2 Lycée Gustave Eiffel.

Exercice 1.

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2 e^{xy}$

2) $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$

3) $h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y+2}}$

4) $k(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$

5) $l(x,y,z) = x^2 y^3 \sqrt{z}$.

Exercice 2.

On considère les fonctions de production suivantes :

1) $f(K,L) = \sqrt{K}\sqrt{L}$

2) $g(K,L) = 2K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}$

où K représente le facteur capital et L le facteur travail.
Calculer les productivités marginales de chaque facteur.

Exercice 3.

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ et tracer les courbes de niveau pour les valeurs de k indiquées.

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}$ avec $k \in \{-1; 0\}$,

2) $f(x,y) = \dfrac{xy - x + y}{xy}$ avec $k \in \{1; 2\}$,

3) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{8 - x^2y^2}$ avec $k = 2$,

4) $f(x,y) = x - y - |x - y|$ avec $k \in \mathbb{R}$,

Exercice 4.

La fonction de demande D_A d'un bien A dépend du prix de A mais aussi des prix P_B et P_C des deux autres biens B et C. On a

$$D_A = P_A^{-0,3} P_B^{0,1} P_C^{-0,4}.$$

Calculer les élasticités partielles de la demande de A par rapport aux prix de A, de B et de C.

Exercice 5.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Elle est dite **homogène** de degré k lorsque pour tout $t > 0$, on a :

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ...x_n).$$

Si f est homogène de degré k, alors on a l'**identité d'Euler** :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = kf(x_1, ..., x_n).$$

1) Montrer que les fonctions suivantes sont homogènes et vérifier l'identité d'Euler :

a) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

b) $g(x,y,z) = x^2 + 2yz$

c) $h(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$

d) $k(K,L) = K^\alpha L^\beta$

2) On pose $U(x,y) = \frac{2xy^2}{x+y}$, avec $x > 0$ et $y > 0$.
Montrer que U est homogène de degré 2 et que les dérivées partielles sont homogènes de degré1.

Exercice 6.

Soit l'équation $F(x,y) = x^3 - 3xy + 6y^3 - 4 = 0$.
Calculer la dérivée au point $M_0(1,1)$ de la fonction f définie implicitement à partir de $F(x,y) = 0$.

Exercice 7.

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y - xe^y \end{array}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de niveau 1.
Vérifier que $\mathcal{C}$ passe par le point $M(0,1)$.
Montrer que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de ce point et déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Exercice 8.

On considère la fonction d'utilité définie par :

$$U(x,y) = \frac{xy}{2x+y} \text{ pour } x > 3 \text{ et } y > 0.$$

où x et y représentent les quantités consommées des biens X et Y.
Calculer le taux marginal de substitution de X à Y correspondant à $U = 3$ pour $x = 6$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3e^{xy}$.

2) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}$ et par symétrie, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}$.

3) $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{2(x+y+2)\sqrt{x+y+2}}$, et par symétrie là encore, $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2(x+y+2)\sqrt{x+y+2}}$.

4) $\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{4-x^2-y^2}$, $\quad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{4-x^2-y^2}$.

5) $\frac{\partial l}{\partial x}(x,y,z) = 2xy^3\sqrt{z}$, $\quad \frac{\partial l}{\partial y}(x,y,z) = 3x^2y^2\sqrt{z}$, $\quad \frac{\partial l}{\partial z}(x,y,z) = x^2y^3\frac{1}{2\sqrt{z}}$.

Exercice 2.

1) $\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}$ et par symétrie, $\frac{\partial f}{\partial L}(K,L) = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}$

2) $\frac{\partial g}{\partial K}(K,L) = \frac{4}{3}K^{\frac{-1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$ et $\frac{\partial g}{\partial L}(K,L) = \frac{2}{3}K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{-2}{3}}$

Exercice 4.

$e_{D_A/P_A} = \frac{\partial D_A}{\partial P_A} \times \frac{P_A}{D_A} = -0,3$. De même, $e_{D_A/P_B} = 0,1$ et $e_{D_A/P_C} = -0,4$.

Exercice 5.

1) a) La fonction f est homogène de degré 1.

b) La fonction g est homogène de degré 2.

c) La fonction f est homogène de degré 0.

d) La fonction f est homogène de degré $\alpha + \beta$.

2) $U(tx,ty) = \frac{2t^3xy^2}{tx+ty} = t^2\frac{2xy^2}{x+y}$

Les dérivées partielles sont $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{2y^3}{(x+y)^2}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(2x+y)}{(x+y)^2}$ et elles sont bien homogènes de degré 1.

Exercice 6.

On utilise le théorème des fonctions implicites. La fonction F est continue à dérivées partielles continues en tant que polynôme.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -3x + 18y^2$$

On a bien $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 9 \neq 0$, donc la dérivée de f en 1 est $f'(1) = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = 0$ car $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 0$.

Exercice 7.

on a bien $f(0,1) = 1$ donc M est bien sur la courbe $\mathcal{C}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme somme et produit de fonctions de référence qui le sont. De plus,

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^y$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - xe^y$ qui est continue elle aussi et surtout, qui ne s'annule pas en M.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites. Il existe une fonction g telle que $y = g(x)$ coïncide avec la courbe de niveau localement en M.

En outre, on a la dérivée de g en M : $g'(0) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)} = e$. D'où une équation de la tangente cherchée : $\boxed{y = ex + 1}$.

Exercice 8.

Le taux marginal de substitution vaut 2. i.e. si on diminue X de Δx, pour conserver $U = 3$ on doit augmenter Y de $2\Delta x$.

Le TMS est donc une mesure de la façon dont on substitue, à la marge, un produit par un autre, de façon à ce que la satisfaction du consommateur soit identique.