

ANNALES Cachan D2 (et D3)
1976-2002

Problème 1:

Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

avec $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

- 1) Déterminer la matrice A associée à q dans la base canonique.
- 2) Construire une base orthonormée B formée de vecteurs propres de A . La matrice A est-elle inversible ?
- 3) Déterminer la matrice A' associée à q dans la base B . En déduire l'expression de la forme réduite de q en fonction des nouvelles coordonnées y_1, y_2, y_3 du vecteur x dans la base B .
- 4) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à B . En déduire l'expression des y_i en fonction des x_i , $i = 1, 2, 3$, puis la forme réduite de $q(x)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3) . Quelle est la nature de cette forme réduite ?

Problème 2:

- 1) Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de leurs termes généraux suivants:
pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ v_n &= u_n + \frac{1}{n(n!)} \end{aligned}$$

- 1.1) Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) .
 - 1.2) Sachant que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$ étudier la convergence de ces deux suites.
 - 1.3) Calculer la limite de la suite $(v_n - u_n)$.
 - 1.4) Comparer les limites, si elles existent, des suites (u_n) et (v_n) .
- 2) Soit la série de terme général suivant:

$$w_n = \frac{1}{n!}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1) Donner la somme partielle W_n de cette série. Comparer avec les résultats précédents.

2.2) Etudier la convergence de cette série.

Problème 3:

Etudier l'existence d'extrema pour les fonctions suivantes. Préciser s'il s'agit d'extrema locaux ou globaux.

1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

2) $f(x, y) = (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)$

3) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

4) $f(x, y) = (a^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4xy$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Problème 4 :

PREMIERE PARTIE

Soit Ω un espace d'événements élémentaires, dont la famille d'événements $\{A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_K\}$ est une partition.

Soit W un vecteur aléatoire de dimension K . Les composantes de W sont notées w_i et telles que $\forall j = 1, \dots, K$

$$\begin{cases} w_j = 1 \text{ si l'événement } A_j \text{ s'est réalisé} \\ w_j = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Pr(w_j = 1) &= p_j \\ \Pr(w_j = 0) &= 1 - p_j \end{aligned} \quad \sum_{j=1}^K p_j = 1 \quad (1)$$

$$\forall j, p_j \geq 0 \quad (2)$$

1. Calculez l'espérance de W et la variance de W .

Soit un entier naturel $n, n \neq 0$ et $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_K \end{bmatrix}$ satisfaisant (1) et (2). On dispose d'une famille de n

vecteurs aléatoires indépendants du type W . Nous les notons $W^i, i = 1, \dots, n$.

On définit alors un nouveau vecteur aléatoire de dimension $K, H = \sum_{i=1}^n W^i$

2. Montrez que $\sum_{j=1}^K H_j = n$ où H_j est la $j^{\text{ème}}$ composante de H .

Soit $h = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_K \end{bmatrix}$ un élément de $\mathbb{N}^K$ tel que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, 0 \leq n_j \leq n$ et $\sum_{j=1}^K n_j = n$

3. Calculez $E(H_j)$ et $\text{Var}(H_j)$.

4. Déterminez $\text{Var}(H)$.

5. Montrez que

$$\begin{cases} f(h) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^K n_j!} \prod_{j=1}^K (p_j)^{n_j} \text{ si } \sum_{j=1}^K n_j = n \\ f(h) = 0 \text{ si } \sum_{j=1}^K n_j \neq n \end{cases}$$

SECONDE PARTIE

Nous cherchons maintenant à procéder au tirage aléatoire d'un échantillon de taille n sur une population de taille finie K . Chaque individu a_j de cette population est supposé posséder une caractéristique $x(a_j)$. Lorsqu'un individu a_j est tiré, la valeur de sa caractéristique $x(a_j)$ est alors parfaitement connue, $\forall j = 1, \dots, K, x(a_j) \in \mathbb{R}$.

Nous considérons l'événement $A_j, 0 \leq j \leq K, A_j$: "l'individu a_j est choisi lors du tirage aléatoire d'un individu dans la population".

$$\Pr(A_j) = \frac{1}{K}$$

Le premier tirage se fait avec remise, il est alors possible qu'un individu soit tiré plusieurs fois.

6. Expliquez pourquoi il est possible d'associer au tirage avec remise d'un échantillon de taille n , un vecteur aléatoire de dimension K ayant les caractéristiques du vecteur H étudié lors de la première partie. (10 lignes maximum).
7. Donnez une interprétation de l'événement $H_j = n_j$.

Le second échantillon est tiré sans remise. Il est encore possible d'associer à ce tirage une variable aléatoire T de dimension K , la j ème composante du T est notée T_j .

8. Quelle est la nature des lois marginales de T .
9. Calculez le paramètre qui les caractérise pour un échantillon de taille n avant tirage. En donner une interprétation.

Lorsque l'on procède au tirage avec remise d'un échantillon aléatoire de taille n , on appelle moyenne

empirique du caractère x la variable aléatoire suivante : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K H_j x(a_j)$

Lorsque l'on procède au tirage d'un échantillon aléatoire sans remise, on appellera moyenne empirique

du caractère x la variable aléatoire suivante : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K T_j x(a_j)$

10. Calculez l'espérance de $\bar{X}_n$ pour les deux procédures d'échantillonnage.
11. Calculez $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.
12. Montrez que dans les deux cas, $E(\bar{X}_n) = E(X)$.

13. Montrez que lors d'un tirage avec remise $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X)}{n}$.

14. Montrez que lors d'un tirage sans remise $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{[N-n]}{[N-1]} \frac{\text{Var}(X)}{n}$.

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

1. Montrer que $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ et que (u_n) est une suite décroissante. La suite (u_n) est-elle convergente ?

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2) \cdot u_{n+2} = (n+1) \cdot u_n. \quad (1)$$

3. Dédurre alors par récurrence de (1) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \cdot u_{2n} = \frac{u_1 \cdot u_0}{2n+1}. \quad (2)$$

Donner alors la limite l de (u_n) .

4. Calculer u_0 et u_1 , puis u_2 et u_3 . Montrer alors à l'aide de (1) que la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

est décroissante, puis qu'elle converge (on ne demande pas sa limite).

Problème 2

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On désigne par $\mathcal{M}^*$ l'ensemble des matrices $A = [a_{ij}]$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour lesquelles les huit sommes

$$\sum_{i=1}^3 a_{ii} ; \sum_{i=1}^3 a_{ij} \ (j=1,2,3) ; \sum_{j=1}^3 a_{ij} \ (i=1,2,3) ; \sum_{i=1}^3 a_{i4-i}$$

sont égales. On notera $s(A)$ la valeur (commune) des huit sommes ci-dessus pour $A \in \mathcal{M}^*$.

Problème 2

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}^*$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}^*$ telles que $A' = -A$ (A' désigne la transposée de A). Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}^*$. Quelle est la valeur commune des huit sommes d'une matrice de $\mathcal{A}$. Expliciter la forme générale des matrices de $\mathcal{A}$.
3. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}^*$ telles que $A' = A$. Soit $B \in \mathcal{S}$. Ecrire B sous la forme de la somme de deux matrices de $\mathcal{S}$ dont l'une admet 0 comme valeur des huit sommes.
4. Expliciter la forme générale des matrices de $\mathcal{S}$.
5. Vérifier si les matrices

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}^*$.

Problème 3

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

admet un extremum global unique dans $\mathbb{R}^2$.

2. Les fonctions suivantes

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$$

$$h : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto g(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz + y - z$$

admettent-elles des extrema locaux ?, globaux ?

Tournez la page S.V.P.

Problème 4

Un parieur se trouve devant un jeu de trois cartes identiques sauf en ce qui concerne la couleur. La première carte, C_{BB} , est blanche sur les deux faces. La deuxième carte, C_{NN} , est noire sur les deux faces. Enfin, la troisième, C_{BN} , est blanche d'un côté et noire de l'autre.

Une carte est tirée au hasard. L'unique face de cette carte que peut voir le joueur est aussi tirée au hasard.

1. Montrer que l'événement "la face cachée est blanche" peut être formulé à l'aide de deux variables aléatoires X, Y relatives aux deux tirages considérés ci-dessus (tirage de la carte et tirage de la face).
2. Le parieur s'apprête à parier sur la couleur de la face cachée de la carte tirée. Montrer à l'aide de la formule de Bayes que le parieur a intérêt à parier sur une couleur spécifique à préciser.

Problème 1

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble $E \neq \emptyset$. Pour $x \in E$, on note $\dot{x}$, la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

1. Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que les propositions (i), (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes où
 - (i) : $x\mathcal{R}y$
 - (ii) : $\dot{x} = \dot{y}$
 - (iii) : $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$
 - (iv) : x et y appartiennent à la même classe d'équivalence.
 En déduire que si $(x, y) \in E^2$, on a $\dot{x} \neq \dot{y} \iff \dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$.
2. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
 - (b) Préciser, pour $x \in \mathbb{R}$, le nombre d'éléments dans $\dot{x}$, classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

1. Montrer que f n'admet pas d'extrema globaux.
2. f admet-elle des extrema locaux?
3. On rappelle le résultat suivant: si f est une fonction continue sur une partie fermée $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe un pavé $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\mathcal{K}$ ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$), alors f admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{K}$.
Soit $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Montrer que f admet un maximum M et un minimum m sur $\mathcal{D}$.
4. Soit $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$. Démontrer que si $f(x_1, x_2) = M$ ou si $f(x_1, x_2) = m$ alors $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Problème 3

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

à éléments réels $a_{ij} \geq 0$. On dit que A est productive s'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ à éléments $x_j \geq 0$ tels que $X - AX > 0$, c'est-à-dire à éléments tous strictement positifs.

1. On se propose ici de montrer que si A est productive, alors $I - A$ est inversible et $(I - A)^{-1}$ est à éléments positifs ou nuls (I désigne la matrice unité). On suppose donc ici A productive.
 - (a) Montrer que tout X vérifiant les propriétés énoncées plus haut est tel que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).
 - (b) Montrer que $0 \leq a_{11} < 1$ et $0 \leq a_{22} < 1$. En déduire par des considérations de signe que les colonnes de $I - A$ ne peuvent pas être liées.
 - (c) Calculer alors $(I - A)^{-1}$ et montrer qu'elle est à éléments positifs ou nuls (c'est-à-dire $(I - A)^{-1} \geq 0$).
2. Montrer alors que A est productive si et seulement si $I - A$ est inversible et $(I - A)^{-1} \geq 0$.
3. Les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

sont-elles productives?

Problème 4

Un candidat au concours d'entrée à une grande école vient de répondre à toutes les questions posées dans l'épreuve de mathématiques. Ses réponses contiennent 4 erreurs. A chaque relecture par le candidat, une faute non-corrigée est corrigée avec une probabilité de $2/3$. On suppose que les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. A chaque relecture, plusieurs erreurs peuvent être corrigées.

Tournez la page S.V.P.

1. Déterminer le nombre minimal de relectures pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit supérieure à 0.8.
2. Même question qu'en 1, avec le nombre X d'erreurs qui est réparti uniformément sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
3. Supposons maintenant qu'après avoir terminé de répondre aux questions posées dans l'épreuve de mathématique en question, le candidat pense que la probabilité que ses réponses soient entièrement correctes est égale à 0.6. Il procède à une relecture de ses réponses en sachant que son expérience passée montre qu'il est capable de déceler des erreurs, lorsqu'elles existent, dans 85 cas sur 100 (en une seule lecture).
 - (a) Déterminer la probabilité qu'après une relecture, le candidat ne trouve aucune erreur.
 - (b) Déterminer la probabilité que ses réponses soient entièrement correctes sachant qu'il n'a trouvé aucune erreur après une relecture.



DURÉE : 4 heures

1999

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

PROBLEME 1

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation binaire notée $\prec$. On suppose $\prec$ asymétrique, c'est-à-dire que $\forall x, y \in E, (x \prec y) \implies \text{non}(y \prec x)$.

- (1) Montrer que $\prec$ n'est pas réflexive.
- (2) On définit une nouvelle relation binaire sur E notée $\preceq$ par

$$\forall x, y \in E, (x \preceq y) \iff \text{non}(y \prec x).$$

Montrer que pour tout $x, y \in E$, une et une seule des propositions suivantes

$$(x \preceq y), (y \prec x)$$

est vraie.

- (3) On définit la relation binaire $\preceq_1$ sur E par:

$$\forall x, y \in E, (x \preceq_1 y) \iff [\forall a \in E, (a \preceq x) \implies (a \preceq y)].$$

Montrer que $\preceq_1$ est réflexive et transitive.

- (4) On suppose que $\preceq$ est pseudo-transitive c'est-à-dire telle que

$$\forall x, x', y, y' \in E, (x \prec x' \preceq y' \prec y) \implies (x \prec y).$$

On définit la relation binaire $\prec_1$ sur E par

$$\forall x, y \in E, (x \prec_1 y) \iff \text{non}(y \preceq_1 x).$$

- (a) Montrer que $(x \prec_1 y) \implies (x \preceq_1 y)$.
- (b) En déduire que le préordre $\preceq_1$ est total.
- (c) Montrer que la relation définie par

$$\forall x, y \in E, (x \preceq_2 y) \iff [\forall a \in E, (y \preceq a) \implies (x \preceq a)]$$

est un préordre total.

Tournez la page S.V.P.

PROBLEME 2

I) Soit Ω un ensemble non vide et A est une partie de Ω . On désigne par I_A l'application de Ω dans l'ensemble $\{0, 1\}$ par:

$$\forall x \in \Omega, \begin{cases} I_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \\ I_A(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les applications de Ω dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

- (1) Montrer que toute application $f \in \mathcal{C}$ peut être considérée comme une application I_A où $A \subset \Omega$.
- (2) Montrer que l'application $\mathcal{T}$ de l'ensemble des parties de Ω , noté $\mathcal{P}(\Omega)$, vers $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{T}(A) = I_A$ est une bijection et que

$$I_A \leq I_B \Leftrightarrow A \subset B.$$

($I_A \leq I_B$ signifie : $\forall x \in \Omega, I_A(x) \leq I_B(x)$).

- (3) Montrer que pour A et $B \subset \Omega$, on a:

$$\begin{aligned} I_{\bar{A}} &= 1 - I_A \\ I_{A \cap B} &= I_A I_B \\ I_{A \cup B} &= I_A + I_B - I_A I_B \end{aligned}$$

$\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω .

II) Supposons que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni d'une mesure de probabilité P et que $(A_1, \dots, A_n)$ et $(B_1, \dots, B_m)$ désignent deux partitions distinctes de Ω . L'application $Z = \sum_{i=1}^n z_i I_{A_i}$ de Ω vers $\mathbb{R}$ peut être considérée comme une variable aléatoire qui prend la valeur réelle z_i , si l'événement A_i se réalise, $i = 1, \dots, n$.

- (1) Soient $X = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}$ et $Y = \sum_{j=1}^m y_j I_{B_j}$ deux applications de Ω vers $\mathbb{R}$.

Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ s'écrit:

$$X + Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j) I_{A_i \cap B_j}$$

- (2) Désignons par $E_P(\cdot)$ l'opérateur espérance mathématique par rapport à la loi P .

Calculer $E_P(I_A)$. En déduire, grâce à I-(3), que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- (3) Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}$ une variable aléatoire et ε un réel positif. Désignons par $[|X| \geq \varepsilon]$ l'événement $\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq \varepsilon\}$ et par $[|X| < \varepsilon]$ l'événement $\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| < \varepsilon\}$. Sachant que la variable aléatoire $X^2 (= X \cdot X)$ peut s'écrire sous la forme

$$X^2 = X^2 h_{[|X| \geq \varepsilon]} + X^2 h_{[|X| < \varepsilon]}$$

montrer que

$$E(X^2) \geq \varepsilon^2 P(|X| \geq \varepsilon).$$

PROBLEME 3

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x - y)e^{(x-y)}.$$

- (1) Trouver les points candidats à un extremum de f .
- (2) Sachant que dg désigne la différentielle totale de la fonction g , calculer df , $d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)$ et $d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$.
- (3) Calculer la différence

$$\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right]^2 - \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}.$$

Qu'en concluez-vous?

- (4) Etudier la fonction $t(z) = ze^z$. En déduire que f atteint son minimum en tous les points d'une droite. Déterminer l'équation de celle-ci.

PROBLEME 4

I) Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$q(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2b(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

- (1) Déterminer la matrice A associée à q dans la base canonique. Quelles conditions doivent être vérifiées par les paramètres a et b pour que la matrice A soit non singulière.
- (2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3)$$

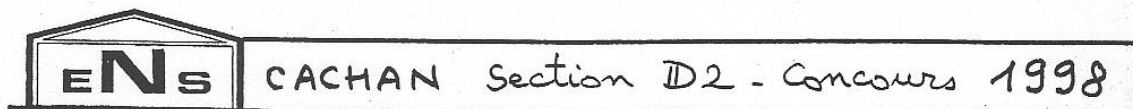
Montrer que la matrice B associée à f , par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est un cas particulier de la matrice A . Calculer B^{-1} .

II)

Supposons que la matrice A est telle que $a = 3$ et $b = 1$.

- (1) Trouver les valeurs propres de A .
- (2) Donner trois vecteurs propres de A orthogonaux non nuls de A .
- (3) Diagonaliser la matrice A . En déduire les coefficients α, β, γ et les nouvelles coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 tels que:

$$q(x'_1, x'_2, x'_3) = \alpha x_1'^2 + \beta x_2'^2 + \gamma x_3'^2$$



DURÉE : 4 heures

coeff 2

Les quatre problèmes sont indépendants

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Premier problème

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation binaire notée $\succ$. Supposons que quels que soient les éléments x, y et z choisis dans E cette relation binaire vérifie les deux propriétés suivantes:

Propriété T: $[non(x \succ y) \text{ et } non(y \succ z)] \implies non(x \succ z)$

Propriété A: $(x \succ y) \implies non(y \succ x)$

La première propriété peut être considérée comme une transitivité négative alors que la deuxième propriété est l'asymétrie. Considérons deux autres relations binaires sur E , notée $\sim$ et $\succsim$, définies à partir de la relation initiale $\succ$ comme suit:

$$\forall x, y \in E, (x \sim y) \iff [non(x \succ y) \text{ et } non(y \succ x)]$$

$$\forall x, y \in E, (x \succsim y) \iff [(x \succ y) \text{ ou } (x \sim y)]$$

A titre d'exemple, E pourrait être un ensemble de paniers de biens et les propositions $x \succ y$, $x \sim y$, $x \succsim y$ pourraient être lues 'le panier x est préféré au panier y ', 'le panier x est équivalent au panier y ' et 'le panier x est préféré ou équivalent au panier y ' respectivement.

- 1) Montrer que une et une seule des propositions suivantes

$$(x \succ y)$$

$$(y \succ x)$$

$$(x \sim y)$$

est vraie.

Tournez la page S.V.P.

- 2) Montrer que la relation $\succ$ est transitive.
- 3) Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
- 4) Etablir les implications suivantes:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in E, \quad (x \succ y) \text{ et } (y \sim z) &\implies (x \succ z) \\ \forall x, y, z \in E, \quad (x \sim y) \text{ et } (y \succ z) &\implies (x \succ z) \end{aligned}$$

- 5) Montrer que la relation $\succsim$ est transitive et complète.

Deuxième problème

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[^3$ par:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -(x_1 x_2 x_3)^{\frac{1}{3}}$$

- 1) Montrer que les fonctions:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

s'écrivent, chacune, sous la forme d'un produit $f(\cdot)h(\cdot)$, où h est une fonction à déterminer dans chacun des trois cas.

- 2) Sachant que

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 \leq 3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$$

montrer, en utilisant la réponse à la question 1), que $\forall (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, $\forall (x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3$ l'expression

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

est non négative. Vérifier à l'aide de la formule de Taylor si f est convexe ou concave.

- 3) Montrer que la fonction

$$g(x_1, x_2, x_3) = e^{f(x_1, x_2, x_3)}$$

est convexe sur le domaine de définition de f .

Troisième Problème

I) On donne la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$$

- I-1) Calculer les valeurs propres de A
- I-2) Déterminer une base de vecteurs propres de A , de première composante égale à 1.
- I-3) Diagonaliser la matrice A et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II) On considère le système (S) d'équations de récurrence:

$$\begin{cases} (1): x_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,3z_n \\ (2): y_{n+1} = 0,3x_n + 0,4y_n + 0,3z_n \\ (3): z_{n+1} = 0,3x_n + 0,3y_n + 0,4z_n \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et (x_0, y_0, z_0) est donné appartenant à $\mathbb{R}^3$.

- II-1) Montrer que (S) équivaut à (S'):

$$\begin{cases} (1'): x_{n+1} = 0,1x_n + 0,3c \\ (2'): y_{n+1} = 0,1y_n + 0,3c \\ (3'): z_{n+1} = 0,1z_n + 0,3c \end{cases}$$

où c est à déterminer.

- II-2) En déduire x_n, y_n, z_n en fonction de n, x_0, y_0, z_0 . Retrouver alors l'expression de A^n obtenue en I-3).

Quatrième problème

I) Le propriétaire d'un petit hôtel de 5 chambres possède deux postes de T.V qu'il peut installer dans les chambres sur demande, moyennant une petite rétribution. Il estime qu'en temps normal, ces deux postes doivent suffire, sachant que par le passé seulement 20% des clients demandaient la T.V. En ne tenant compte que des nuits où les 5 chambres sont toutes occupées, calculer:

- I-1) La proportion des nuits où les 2 postes ne satisferont pas la demande.

Tournez la page S.V.P.

- I-2) Le nombre moyen de postes demandés.
- I-3) Le nombre moyen de postes réellement loués.
- I-4) Le rendement moyen de la location des T.V, sachant que le propriétaire touche 30 F par poste.

II) Résoudre le même problème que précédemment pour un hôtel de 60 chambres possédant 24 postes de T.V. On justifiera l'approximation utilisée au I-1), et on montrera que le nombre moyen de postes réellement loués est compris entre 11,994 et 12. On prendra $\frac{13}{\sqrt{9.6}} = 3,87$.



1997

DURÉE : 4 heures

Les trois problèmes sont indépendants

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

PREMIER PROBLÈME

1. Etudier les variations de f , fonction réelle de la variable réelle x , définie par $f(x) = \text{Ln}(x^2 + 1)$ et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (on pourra prendre $\text{Ln } 2 = 0,69$).
2.
 - 2.1. Pour quelle valeur de $m \in \mathbb{R}_+$, la courbe représentative de $f_m(x) = \text{Ln}(mx^2 + 1)$ passe-t-elle par le point de coordonnées (1,1) ?
 - 2.2. Soit $d(x) = x - \text{Ln}((e-1)x^2 + 1)$.
Calculer $d(0)$ et $d(1)$. Etudier les variations de $d(x)$.
En déduire le signe de d sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. On rappelle que la courbe de Gini est la courbe représentative de la fonction $p(x)$ qui donne le pourcentage de la masse salariale globale détenue par les $x\%$ salariés les moins payés pour une entreprise donnée.
 - 3.1. Expliquer pourquoi la courbe de f_{e-1} définie sur $[0, 1]$ peut être considérée comme une courbe de Gini.
 - 3.2. Calculer le coefficient de concentration de Gini G :

$$G = 1 - \frac{S}{\frac{1}{2}} \quad \text{où} \quad S = \int_0^1 f_{e-1}(x) dx.$$

Conclure.

On rappelle que $(\frac{1}{a} \text{Arctg } ax)' = \frac{1}{1+a^2x^2} \quad \forall a \in \mathbb{R}^*$ et on prendra $\frac{2}{\sqrt{e-1}} \text{Arctg} \sqrt{e-1} - 1 = 0,4$.

Tournez la page S.V.P.

DEUXIÈME PROBLÈME

1. On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

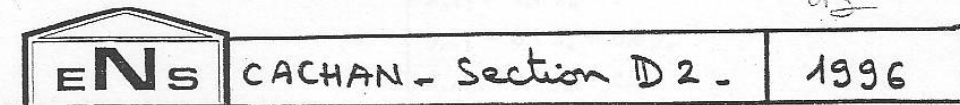
- 1.1. Calculer les valeurs propres de A .
 - 1.2. Déterminer les vecteurs propres de A .
 - 1.3. Diagonaliser la matrice A .
 - 1.4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Dédire de 1 l'expression du terme général u_n de la suite réelle (u_n) solution de :
- $$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ et telle que } u_0 = -1, u_1 = 0, u_2 = 0.$$

TROISIÈME PROBLÈME

Une entreprise expédie chaque jour à l'étranger et indépendamment les uns des autres un nombre Z de colis. On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramètre 10, et que la probabilité qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0,1.

X (respectivement Y) désigne la variable aléatoire égale un jour donné au nombre de colis détériorés (resp. non détériorés) expédiés à l'étranger. On a donc $X + Y = Z$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ la probabilité conditionnelle de $X = k$ sachant $Z = n$: $P(X = k \mid Z = n)$.
2. Donner la loi du couple (X, Z) , et en déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 1. (On rappelle que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$)
3. On admettra dans ce qui suit que le même raisonnement qu'au 2 montre que Y suit une loi de Poisson de paramètre 9.
 - 3.1. Si k et l sont deux entiers naturels, calculer la probabilité : $P((X = k) \cap (Y = l))$.
 - 3.2. X et Y sont-elles indépendantes ?



DURÉE : 4 heures

Les trois problèmes sont indépendants

PREMIER PROBLÈME

Une urne contient n boules parmi lesquelles 4 sont rouges, les autres étant noires.

1. On tire successivement 2 boules de l'urne sans remettre la première avant de tirer la seconde. Donner, en fonction de n , la probabilité p_n de l'événement E_n : « la première boule tirée est rouge, la seconde est noire ».
2. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{4(x-4)}{x^2-x}$, où $x \in \mathbb{R}$, admet dans l'intervalle $[4, +\infty[$ un maximum pour une valeur x_0 de x que l'on déterminera.
3. Déterminer n , de telle sorte que la probabilité p_n ait sa valeur maximale.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on $p_n > \frac{1}{4}$?

DEUXIÈME PROBLÈME

1. On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1.1. Calculer les valeurs propres de A .
- 1.2. Déterminer les vecteurs propres de A .
- 1.3. Diagonaliser la matrice A .
- 1.4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Tournez la page S.V.P.

2. L'évolution des populations x_n, y_n, z_n en fin de période $n \in \mathbb{N}$ de trois pays X, Y, Z, est décrite par le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1,1 x_n \\ y_{n+1} = 0,1 x_n + 0,8 y_n \\ z_{n+1} = 0,1 y_n + z_n \end{cases}$$

- 2.1. Décomposer en termes de mouvements migratoires et mouvements démographiques (naissances et décès) l'évolution des diverses populations. On indiquera le taux de croissance démographique sur chaque période des différents pays.
- 2.2. Exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de n et x_0, y_0, z_0 .
Étudier la convergence de ces suites.

TROISIÈME PROBLÈME

On considère une suite de dates équidistantes indicées par $n \in \mathbb{N}^*$, et on s'intéresse au fonctionnement d'un appareil sujet à des pannes accidentelles. On suppose que :

- a. Si l'appareil fonctionne à la date n , il a la probabilité a d'être en panne à la date $n + 1$;
b. Si l'appareil est en panne à la date n , il a la probabilité b d'être en état de marche à la date $n + 1$.

1. On appelle p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à la date n .

Montrer que $p_{n+1} = b + (1 - a - b) p_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que :

$$\text{si } a + b \neq 0 \text{ on a } p_{n+1} = \frac{b}{a+b} + \left(p_1 - \frac{b}{a+b} \right) (1 - a - b)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Étudier la convergence de la suite (p_n) .

2. On suppose ici que $a \cdot b \neq 0$ et que $p_1 = \frac{b}{a+b}$, et on se limite aux dates 1 et 2. On considère les variables aléatoires X_1 et X_2 où :

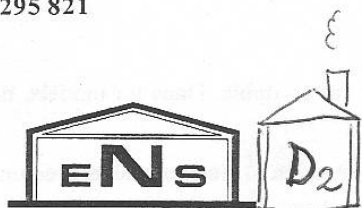
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'appareil est en état de marche à la date } i \\ 0 & \text{si l'appareil est en panne à la date } i \end{cases} \quad \text{avec } i = 1, 2.$$

Calculer :

- 2.1. L'espérance mathématique et la variance de X_1 et X_2 .
2.2. Le coefficient de corrélation linéaire r entre X_1 et X_2 .
2.3. L'espérance mathématique et la variance du temps de fonctionnement :

$$T = X_1 + X_2 \text{ de l'appareil entre les dates 0 et 2.}$$

À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b , les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes en probabilité ?



1995

DURÉE : 4 heures

A. On donne la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice $Q = \frac{1}{4}(I + P)$.

(I désigne la matrice unité d'ordre 3).

1. Calculer P^2 et P^3 .
2. Calculer, pour n entier naturel, la matrice P^n .
3. En déduire une expression simple de Q^n .

B.

1. Calculer les valeurs propres de Q .
2. Déterminer les vecteurs propres de Q .
3. Si c'est possible, diagonaliser Q .
4. Retrouver ainsi le résultat de la question A.3.

C. On définit des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n);$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 2v_n + w_n);$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n).$$

1. Exprimer u_n , v_n et w_n en fonction de n .
2. Étudier la convergence de ces suites.
3. Examiner le cas où u_0 , v_0 , w_0 ont la même valeur non nulle.

Tournez la page S.V.P.

D. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, baisser ou rester stable. Dans un modèle, on considère que :

- si un jour n , le titre monte, le jour $n + 1$, il montera avec une probabilité $\frac{1}{2}$, restera stable avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et baissera avec une probabilité $\frac{1}{4}$;
- si un jour n , le titre est stable, le jour $n + 1$, il montera avec une probabilité $\frac{1}{4}$, restera stable avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et baissera avec une probabilité $\frac{1}{4}$;
- si un jour n , le titre baisse, le jour $n + 1$, il montera avec une probabilité $\frac{1}{4}$, restera stable avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et baissera avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité et de baisse au jour $n + 1$ en fonction de ces mêmes probabilités au jour n .
2. Comment varient les limites de ces probabilités à long terme en fonction de ces mêmes probabilités au premier jour ?

E. Une série statistique prend, au mois n^o p de l'année n , la valeur :

$$s(p, n) = 1 + p + 4^n$$

(p est un entier prenant les valeurs de 1 à 12, n est un entier prenant les valeurs de 0 à 5).

1. Déterminer les coefficients saisonniers.
2. En déduire une série désaisonnalisée.
3. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série donnée.
4. On réexprime cette série en fonction du numéro de mois q sur l'ensemble de la période (q est donc un entier prenant les valeurs de 1 à 72). Effectuer un ajustement linéaire de cette série.



CACHAN

Section D2 - 1994

DURÉE : 4 heures

Les questions 2.1., 2.2., 2.3., 3, 4 et 5 sont indépendantes

Deux biens indéfiniment divisibles sont disponibles sur un marché. On appelle « panier de biens » tout couple (x, y) de nombres réels appartenant à l'ensemble D suivant :

$$D = \{(x, y), 2 \leq x \leq 10, 1 \leq y \leq 6, 2x + 3y \leq 26\}.$$

x et y désignent respectivement les quantités de bien un et de bien deux qui peuvent être physiquement consommés par un agent économique.

Sur ce marché les prix des deux biens sont chacun égaux à 1 unité monétaire.

On considère trois consommateurs ayant tous le même revenu égal à 11 unités monétaires, mais possédant des préférences sur les paniers de biens différentes.

Les paniers de biens accessibles budgétairement pour ces consommateurs appartiennent donc à l'ensemble $B = \{(x, y) \in D, x + y \leq 11\}$.

Question 1

Représenter graphiquement dans un système d'axes orthonormés l'ensemble B .

Question 2

2.1. Les préférences du consommateur 1 sur les paniers de biens sont définies de la façon suivante :

(x, y) préféré ou indifférent à (x', y') si et seulement si : $(x \geq x')$ ou $(x = x' \text{ et } y \geq y')$.

On notera $P(1)$ la relation binaire ainsi définie sur D .

2.1.1. La relation $P(1)$ est-elle un préordre total sur D ? (on justifiera sa réponse soit en donnant une démonstration si cela est vrai, soit en donnant un contre-exemple approprié pour la propriété qui n'est pas vérifiée).

2.1.2. Déterminer, s'ils existent, le ou les éléments maximaux de B pour la relation $P(1)$.

2.2. Les préférences du consommateur 2 sur les paniers de biens sont définies de la façon suivante :

(x, y) préféré ou indifférent à (x', y') si et seulement si $x \geq x'$ et $y \geq y'$.

On notera $P(2)$ la relation binaire ainsi définie sur D .

2.2.1. La relation $P(2)$ est-elle un préordre total sur D ? (on justifiera sa réponse soit en donnant une démonstration si cela est vrai, soit en donnant un contre-exemple approprié pour la propriété qui n'est pas vérifiée).

2.2.2. Déterminer, s'ils existent, le ou les éléments maximaux de B pour la relation $P(2)$.

2.3. Les préférences du consommateur 3 sur les paniers de biens sont définies de la façon suivante :

(x, y) préféré ou indifférent à (x', y') si et seulement si $(y - 4)e^x \geq (y' - 4)e^{x'}$.

On notera $P(3)$ la relation binaire ainsi définie sur D et u l'application de D dans l'ensemble des réels, définie par $u(x, y) = (y - 4)e^x$. La fonction u est appelée fonction d'utilité du consommateur 3.

2.3.1. La relation $P(3)$ est-elle un préordre total sur D ? (on justifiera sa réponse soit en donnant une démonstration si cela est vrai, soit en donnant un contre-exemple approprié pour la propriété qui n'est pas vérifiée).

Tournez la page S.V.P.

Question 3

Soit m un nombre réel, dans tout ce qui suit on désigne par $I(m)$ l'ensemble défini par :

$$I(m) = \{(x, y) \in D / u(x, y) = m\} \quad \text{où} \quad u(x, y) = (y - 4)e^x.$$

- 3.1. Déterminer la fonction numérique f_m telle que, pour m fixé on ait, pour tout élément (x, y) de $I(m)$, $y = f_m(x)$.
- 3.2. Étudier et représenter sur le graphique de la question 1 la fonction $y = f_m(x)$ pour les valeurs suivantes de m : $m = -2$, $m = 0$, $m = 2$.
- 3.3. Déterminer m^* pour que la courbe représentative de $y = f_{m^*}(x)$ soit tangente à la droite T d'équation :

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{26}{3}.$$

Représenter $y = f_{m^*}(x)$ sur le graphique de la question 1.

Question 4

- 4.1. Rechercher les extremums de la fonction $u(x, y) = (y - 4)e^x$ sous la contrainte, $x + y = 11$.
- 4.2. Rechercher les extremums de la fonction $u(x, y) = (y - 4)e^x$ sous la contrainte, $2x + 3y = 26$.
- 4.3. Dédire de tout ce qui précède la valeur d'un élément maximal de B pour $P(3)$.

Question 5

On étudie les paniers de biens (x, y) choisis par une population de 1 000 individus.

Tous les paniers de biens qui ont été observés sont constitués de quantités de bien un et de bien deux entières (x et y sont des entiers naturels).

La distribution en fréquence de la variable statistique X des quantités de bien un choisies par ces individus est la suivante :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence	0,18	0,18	0,18	0,15	0,12	0,08	0,06	0,02	0,03

On remarque également que **quelle que soit la quantité de bien un observée :**

- a. Toutes les quantités y de bien deux accessibles budgétairement ont été observées ;
 - b. Les fréquences des modalités observées de la variable statistique Y , quantité de bien 2 choisie par un individu pour constituer son panier de biens, sont égales.
- 5.1. Dresser le tableau d'effectifs (tableau de contingence en effectifs) des deux variables X et Y .
 - 5.2. Donner les distributions conditionnelles en fréquence de Y , calculer les moyennes conditionnelles et les variances conditionnelles qui leur sont associées.
 - 5.3. Les deux caractères étudiés sont-ils indépendants ?
 - 5.4. Calculer le rapport de corrélation de Y en X .



Cachan

DURÉE : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A

On désigne par f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{k}{2x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}(e-1) \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}(e-1) \end{cases}$$

où k désigne un réel.

1. Étudier l'application f lorsque $k = e$.

Tracer son graphe dans un repère orthonormé (on prendra 2,72 pour valeur approchée de e).

2. Déterminer la valeur de k pour laquelle l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}(e-1)$ est égale à 1.

3.

a. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}(e-1)} \frac{2x}{2x+1} dx$.

b. Soit M un élément de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}(e-1)\right]$.

Calculer $I(M) = \int_0^{\frac{1}{2}(e-1)} \frac{2(x-M)^2}{2x+1} dx$.

- c. Étudier $I(M)$ sur $\left[0; \frac{1}{2}(e-1)\right]$; en déduire que $I(M)$ possède un minimum sur cet intervalle.

Calculer la valeur de M pour laquelle ce minimum est atteint.

Tournez la page S.V.P.

4.

a. Étudier sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}(e-1)\right]$ la fonction

$$y = \ln(2x+1).$$

Calculer la valeur de x pour laquelle $y = \frac{1}{2}$.

b. Soit m un élément de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}(e-1)\right]$.

$$\text{Calculer } J(m) = \int_0^{\frac{1}{2}(e-1)} \frac{2|x-m|}{2x+1} dx.$$

c. Étudier $J(m)$ sur $\left[0; \frac{1}{2}(e-1)\right]$; en déduire que $J(m)$ possède un minimum sur cet intervalle.

Calculer la valeur de m pour laquelle ce minimum est atteint.

5. Donner une interprétation probabiliste des résultats obtenus dans les questions 2, 3 et 4.

B

On donne une série double (X, Y) par les fréquences

$$f(X=i, Y=j) = k \frac{\alpha^{i+j}}{i!j!}$$

α est un paramètre strictement positif, i et j prennent toutes les valeurs entières et k est un nombre réel.

1. Calculer k .

2. Calculer la distribution de $X+Y$.

3. Calculer la distribution conditionnelle de X liée par $Y=1$.

Calculer la moyenne, la variance.

4. On donne un entier n . Calculer la distribution conditionnelle de X liée par $Y \leq n$.

5. On sait désormais que $X \leq n$ et $Y \leq n$. Préciser la distribution conjointe de X et Y .

DURÉE : 4 heures

D₂ 896

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A. MATHÉMATIQUES

On rappelle qu'une fonction G de deux variables x et y est dite à variables séparées lorsqu'elle est égale au produit d'une fonction de la seule variable x par une fonction de la seule variable y .

*
* *

À toute fonction numérique f définie et continue sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction G de deux variables telle que :

$$G(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

1. Expliciter la fonction G dans les cas suivants :

a. $f(x) = ax + b$ $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = \frac{1}{k} (e^{kx} - e^{-kx})$ $k \in \mathbb{R}^*$

c. $f(x) = \frac{2}{k} \sin kx$ $k \in \mathbb{R}^*$

2. Déterminer toutes les fonctions affines telles que G soit à variables séparées.

3. Quelles sont les fonctions f telles que G soit symétrique en x et y ?

4. On s'intéresse dans cette question aux fonctions f telles que $G(x, y) = f(x)f(y)$.

a. Montrer que f est indéfiniment dérivable.

b. Vérifier qu'il existe un nombre a tel que $f'' + af = 0$.

c. Soit E_a l'ensemble des fonctions f vérifiant la relation $f'' + af = 0$. Montrer que E_a est un espace vectoriel.

d. Existe-t-il dans E_a des fonctions h telles que :

$$h(x) = e^{kx} ? \quad h(x) = \sin kx ? \quad h(x) = \cos kx ?$$

En admettant que E_a est de dimension 2, déterminer l'ensemble des fonctions f telles que $G(x, y) = f(x)f(y)$.

Tournez la page S.V.P.

B. STATISTIQUES

I

On donne la répartition des revenus mensuels dans un secteur fiscal :

Revenus mensuels (en F)	Effectifs (en %)
[0 ; 4 000[	5
[4 000 ; 5 000[	24
[5 000 ; 6 000[	26
[6 000 ; 8 000[	17
[8 000 ; 10 000[	14
[10 000 ; 12 000[	11
[12 000 ; 15 000[	3

1. Calculer les fréquences cumulées.
2. Dessiner l'histogramme et tracer la courbe des fréquences cumulées.
3. Calculer les revenus moyens et médians.
4. Calculer l'écart type.

II

On considère le tableau donnant la répartition au cours d'une année, du chiffre d'affaires d'une entreprise et de ses frais postaux :

Mois	CA (en millions de F)	Frais postaux (en F)
Janvier.....	10,4	20 000
Février.....	10,8	20 700
Mars.....	12,4	23 800
Avril.....	13,8	24 500
Mai.....	12,8	23 200
Juin.....	11,6	22 000
Juillet.....	8,2	16 600
Août.....	2,4	11 500
Septembre.....	7,8	22 100
Octobre.....	12,6	22 500
Novembre.....	13,2	23 100
Décembre.....	11,8	21 200

1. On désire faire un ajustement linéaire donnant les frais postaux en fonction du CA. Un tel ajustement vous semble-t-il justifié ?
2. Calculer les coefficients de la droite de régression des frais postaux en fonction du CA.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire et interpréter sa valeur.

III

Soient $\{A_t \mid t = 1, 2, \dots, n, \dots\}$ une suite d'épreuves de Bernoulli telles que :

$$P(A_t = 1) = 0,2 \quad P(A_t = 0) = 0,8$$

$$P(A_{t+1} = 1 \mid A_t = 1) = 0,8$$

$$P(A_{t+2} = 1 \mid (A_{t+1} = 1) \cap (A_t = 1)) = P(A_{t+2} = 1 \mid A_{t+1} = 1)$$

$$P(A_{t+2} = 1 \mid (A_{t+1} = 1) \cap (A_t = 0)) = P(A_{t+2} = 1 \mid A_{t+1} = 1)$$

$$P(A_{t+2} = 1 \mid (A_{t+1} = 0) \cap (A_t = 1)) = P(A_{t+2} = 1 \mid A_{t+1} = 0)$$

$$P(A_{t+2} = 1 \mid (A_{t+1} = 0) \cap (A_t = 0)) = P(A_{t+2} = 1 \mid A_{t+1} = 0)$$

1. Calculer $P((A_{t+1} = 1) \cap (A_t = 1))$
2. Calculer $P(A_{t+1} = 1 \mid A_t = 0)$
3. Calculer $P((A_{t+2} = 1) \cap (A_{t+1} = 1) \mid A_t = 1)$
4. Calculer $P(A_{t+2} = 1 \mid A_t = 1)$

DURÉE : 4 heures

I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4}$$

1. Écrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $g(t) = (1 - 3t + 4t^3)^{1/3}$.
2. Étudier le comportement à l'infini de $f(x)$, rechercher les asymptotes et préciser la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
3. Faire une étude détaillée de f au voisinage des points $x = -1, 0, 2$. Rechercher la tangente et donner la position de la courbe par rapport à la tangente.
4. Dresser le tableau des variations de f .
5. Tracer le graphe de f .

II

Soit :

$$\begin{cases} x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} & + \frac{1}{4}z_{n-1} \\ y_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-1} & + \frac{1}{4}z_{n-1} \\ z_n = & \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{1}{2}z_{n-1} \end{cases}$$

1. On pose $V_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, montrer qu'il existe entre V_n et V_{n-1} une relation de la forme $V_n = SV_{n-1}$ où S est une matrice à déterminer. En déduire V_n en fonction de S et de V_0 .
2. Résoudre et discuter en fonction du paramètre réel λ , l'équation $SV = \lambda V$, où $V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
Pour quelles valeurs de λ , existe-t-il au moins une solution différente de $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$? donner précisément l'ensemble des solutions correspondantes.
3. On considère les vecteurs :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 & - e_3 \\ \varepsilon_3 = 3e_1 + e_2 & - 4e_3 \end{cases} \quad \text{où } (e_1, e_2, e_3) \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^3$$

Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Tournez la page S.V.P.

4. On pose $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

Pourquoi peut-on affirmer que P est inversible ? Calculer son inverse P^{-1} .

5. On pose $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$. Calculer PDP^{-1} .

6. En déduire la limite de V_n quand n tend vers l'infini.

III

Montrer que si A et B sont des événements indépendants, alors leurs complémentaires A^c et B^c le sont aussi.

Généraliser ce résultat pour trois événements indépendants.

Les probabilités que trois tireurs atteignent une cible sont respectivement $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$.

- Quelle est la probabilité que l'un d'eux (et un seul) atteigne la cible ?
- Si l'un a atteint la cible, quelle est la probabilité qu'il s'agisse du premier ?

IV

Optimiser $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + x - 3z$.

- sans contrainte.
- sous la contrainte $x = \frac{2}{3}y$.
- sous la contrainte $x = 3z$.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

Durée : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A. MATHÉMATIQUES

Les vecteurs considérés dans ce problème appartiennent à $\mathbb{R}^3$, et sont repérés dans une base B donnée.

A tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b, c) on associe le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées :

$$a' = 4a - 8b + 2c$$

$$b' = b$$

$$c' = -2a + 5b$$

1. Quelles sont les images de chacun des vecteurs de la base B ?
2. Déterminer les vecteurs dont les images sont les vecteurs de B.
3. Soit h un nombre réel ; on se propose de déterminer les vecteurs non nuls $\vec{u}$ tels que $\vec{u}' = h\vec{u}$, et parmi eux, les vecteurs unitaires s'il en existe.
 - a. Résoudre la question pour $h = 1$.
 - b. Résoudre la question pour $h = 0$.
4. On suppose $h \neq 1$. Démontrer que la question précédente n'admet de solution que pour une valeur particulière de h , qu'on calculera ; on déterminera alors les solutions.
5. Soit A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

et I la matrice unité d'ordre 3. Calculer A^2 et le produit $(A - 2I)^2 (A - I)$. En déduire A^{-1} .

Aucun instrument de calcul n'est nécessaire ni autorisé

Tournez la page S.V.P.

B. STATISTIQUES

I

On suppose le panier de la ménagère composé seulement de quatre produits A, B, C et D. On donne ci-dessous sa composition et les indices des prix des produits qui le composent à deux époques t_1 et t_2 .

Produit	t_1		t_2	
	Composition (en %)	Indice des prix (base 100 à t_0)	Composition (en %)	Indice des prix (base 100 à t_0)
A	10	400	5	420
B	20	120	25	130
C	50	100	55	110
D	20	100	15	200

1. Calculer, en pourcentage, les augmentations de prix unitaires de chacun des produits par rapport à t_0 et les augmentations de ces prix entre t_1 et t_2 .
2. Calculer, en t_1 et t_2 , les indices de valeur globale du panier de la ménagère.

II

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches en proportions respectives p_1 et p_2 et des boules rouges en proportions respectives q_1 et q_2 , avec $p_1 + q_1 = 1$ et $p_2 + q_2 = 1$.

Pour le premier tirage, on tire au sort, avec équiprobabilité, l'urne où on effectue ce tirage. Pour le n -ième tirage, on l'effectue dans l'urne 1 si le résultat du $(n-1)$ -ième a été une boule blanche, dans l'urne 2 si ce résultat a été une boule rouge. À chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne d'où on l'a tirée.

1. Calculer la probabilité b_1 de tirer une boule blanche au premier tirage, b_2 au deuxième et b_3 au troisième.
2. Sachant que la dernière boule tirée est blanche, quelle est la probabilité de l'avoir tirée de l'urne 1 au premier tirage ? Au second ? Au troisième ?
3. Calculer b_k , probabilité de tirer une boule blanche au k -ième tirage, en fonction de b_{k-1} et r_{k-1} , probabilité, au $(k-1)$ -ième tirage, de tirer respectivement une boule blanche et une rouge. Calculer de même r_k .
4. Calculer, si elle existe, la limite de b_k quand le nombre de tirages augmente indéfiniment.

D₃ 1988

DURÉE : 4 heures

Prévoir 2 feuilles de papier millimétré par candidat.

I. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

et (C) la courbe représentative de f .

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f . S'il y a lieu, préciser la valeur de $f'(0)$.
2. Étudier les variations de f .
3. Faire une étude précise en $+\infty$ et $-\infty$ en précisant, dans chacun des cas, la position de (C) par rapport à l'asymptote.
4. Tracer la courbe (C).

$$\text{II. Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^n pour tout entier $n \geq 2$.

La matrice A est-elle inversible?

2. Pour tout réel x , on pose :

$$M_x = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2.$$

Comparer les matrices M_{x+y} et $M_x M_y$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$).

3. En déduire les produits matriciels $M_x M_{-x}$ et $M_{-x} M_x$ quand $x \in \mathbb{R}$. La matrice M_x est-elle inversible ? Si oui quelle est son inverse?

4. Application : Soit $B = I + 4A + 8A^2$.

Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1} . Préciser les coefficients b_{ij} $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ de cette matrice B^{-1} .

III. Soient f et g les deux fonctions réelles de deux variables réelles définies par :

$$\begin{aligned} (x, y) &\longmapsto f(x, y) = x^2 + y^2 \\ (x, y) &\longmapsto g(x, y) = x + 2y \end{aligned}$$

Tournez la page S. V. P.

1. Donner les domaines de définition de f et g .
Quelles sont les lignes de niveau de f et g ?
 2. Déterminer les extrema de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 5$.
Déterminer les extrema de la fonction g sous la contrainte $f(x, y) = 5$.
Dans chaque cas, donner l'interprétation géométrique et la valeur de la fonction à l'extremum.
Que peut-on remarquer?
- IV. Le service des transports urbains d'une grande ville dispose d'une flotte de 1 000 autobus. On suppose que la probabilité qu'un autobus tombe en panne un jour donné est 0,0024.
- a. Si le service de maintenance est en mesure de réparer 6 autobus par jour, calculer la probabilité qu'un jour donné ce service ne puisse faire face à toutes les pannes.
 - b. Calculer la probabilité que le service de maintenance ne soit pas capable de réparer toutes les pannes survenues un jour donné, au moins 4 fois dans l'année. (On prendra une année de 365 jours.)
 - c. Déterminer alors le niveau du service de maintenance (en nombre d'autobus réparés par jour) pour qu'il y ait environ 99,9 % de chances que tous les autobus en panne un jour donné soient réparés le jour même.

2 87

DURÉE : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A. MATHÉMATIQUES

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ l'ensemble E des vecteurs :

$$x_1 = (1, 3, 5) \quad x_2 = (2, 4, 1) \quad x_3 = (1, -1, -13) \quad x_4 = (6, 8, -15).$$

1° Former tous les systèmes libres inclus dans E.

2° Former tous les systèmes générateurs inclus dans E.

3° On donne un nombre réel m . À tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$, on associe le vecteur :

$$v' = (v \cdot x_1, v \cdot x_2, v \cdot x)$$

dont les coordonnées sont les produits scalaires de v par les vecteurs x_1, x_2 et $x = (1, -1, m)$.

Démontrer qu'on définit ainsi une opération linéaire et préciser la matrice correspondante.

4° À quelle condition sur m cette matrice est-elle inversible?

5° On pose $m = 1$.

Déterminer v en sorte que $v' = (3, 6, 6)$.

6° Même question pour $m = -13$.

Tournez la page S. V. P.

B. STATISTIQUES

Les parties I et II sont indépendantes.

I. On considère le tableau suivant donnant l'effet d'un engrais sur 100 plantes en fonction de la dose administrée X et de la taille Y de la plante une année après le traitement :

Dose administrée \ Taille en mètres	10	20	30	40	
1.05 à 1.15.....	10			10	20
1.15 à 1.25.....	10		20	10	40
1.25 à 1.35.....		10	10		20
1.35 à 1.45.....		10	10		20
	20	20	40	20	100

- 1° Déterminer la classe modale des tailles.
- 2° Calculer la médiane des tailles.
- 3° Calculer la taille moyenne et son écart-type.
- 4° Calculer les moyennes conditionnelles des tailles suivant les doses.
- 5° Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
- 6° Interprétez le résultat précédent. Quel ajustement serait adapté aux données de cet exemple ?

II. Soit une variable aléatoire X discrète, définie, pour tout x entier, par :

$$P(X = x) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \quad \text{si } 1 \leq x \leq uv$$

$$P(X = x) = 0 \quad \text{si } x > uv$$

où u et v sont deux nombres entiers donnés strictement positifs.

- 1° Quelle(s) condition(s) doivent vérifier u et v pour que la suite $P(X = x)$ définisse la loi de probabilité de la v.a. X ?
- 2° Déterminer la fonction de répartition de la v.a. X.
- 3° Calculer l'espérance mathématique de la v.a. X.
- 4° Soient X_1 et X_2 , deux v.a. indépendantes, de même loi que X, déterminer la loi de la v.a. $Y = \text{Max}(X_1, X_2)$.

DURÉE : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

Prévoir quatre feuilles de papier millimétré par candidat.

A. MATHÉMATIQUES

I

On définit une suite (u_n) en posant, pour $n \geq 1$:

$$u_n = n^n$$

1° Calculer ses quatre premiers termes.

2° Déterminer le nombre de chiffres de u_{30} , de u_{64} .

3° Déterminer le plus petit entier n tel que u_n s'écrive avec au moins 20 chiffres.

4° Étudier les séries de terme général $\frac{1}{u_n}$ et $\frac{n}{u_n}$.

II

On donne la relation :

$$x^x = e^y$$

1° Étudier le signe de y selon les valeurs de x .

2° Dans un plan muni d'un repère cartésien, représenter l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient cette relation.

III

Étudier les variations de la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^x$$

On précisera notamment :

- a. la dérivée;
- b. le sens de variation;
- c. les branches infinies.

NOTA. — On pourra, si on le souhaite, utiliser les valeurs approchées de $\log 2 : 0,30103$ et de $\log 3 : 0,47712$.

Tournez la page S. V. P.

B. STATISTIQUES

Les parties I et II sont indépendantes.

I. Soit la distribution statistique double suivante :

X \ Y	1	2	3	4
100-200	7	8		
200-300	2	13	15	
300-500		7	20	3
500-900			12	13

1° Tracer les courbes des fonctions de répartition marginale et conditionnelles de X.

2° Calculer les moyennes marginale et conditionnelles de X.

Quelle est la relation qui les lie ?

3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Déterminer la droite d'ajustement des moindres carrés de Y en X.

II. Une urne contient $\frac{1}{5}$ de boules blanches et $\frac{4}{5}$ de boules noires. On tire au hasard successivement et avec remise une série de boules.

1° Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire R_1 « rang du tirage de la 1^{re} boule blanche » ?

2° Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire R_1 .

3° On tire, suivant le même procédé, un échantillon de taille n .

Déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire N « nombre de boules blanches tirées ».

4° Sachant que les k premières boules tirées sont noires, quelle est la loi de probabilité du rang T de tirage de la première boule blanche ?

5° Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire R_2 « rang du tirage de la deuxième boule blanche ».

DURÉE : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A. MATHÉMATIQUES

I

Déterminer le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II

On note N la transposée de la matrice M :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer, si c'est possible, les produits de matrices :

$$MM \quad MN \quad NM \quad NN$$

Déterminer les rangs des matrices MN et NM .

Tournez la page S. V. P.

III

On donne des réels a, b, c, d . Résoudre et discuter le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y = a b \\ x + z = a c \\ x + t = a d \\ y + z = b c \\ y + t = b d \\ z + t = c d \end{cases}$$

B. STATISTIQUES

Les parties I et II sont indépendantes.

I

Dans une entreprise, on a mesuré la taille T des 120 ouvriers :

$T < 165$	7
$165 \leq T < 170$	20
$170 \leq T < 175$	28
$175 \leq T < 180$	26
$180 \leq T < 185$	18
$185 \leq T < 190$	10
$190 \leq T < 195$	7
$195 \leq T$	4

1° Calculer la moyenne et l'écart type de la série statistique des tailles.

2° Déterminer la médiane et l'intervalle interquartile.

3° Quelle est la classe modale ? Peut-on déterminer le mode de cette série ?

II

Dans un atelier, se trouvent deux machines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui doivent fonctionner simultanément pour fabriquer une pièce. Chaque machine a une même probabilité p de se dérégler en fabriquant cette pièce qui est alors défectueuse. Les dérèglements des machines sont indépendants en probabilité.

1° Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

2° Calculer les probabilités qu'il y ait 0, 1 ou 2 machines dérégées.

3° On sait que la pièce fabriquée est défectueuse. Quelle est la probabilité pour que ce soit dû à une et une seule machine ? Aux deux machines ?

4° Soit M l'événement « la pièce fabriquée est défectueuse », A (resp. B) l'événement « la machine $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est déréglée », calculer $P(A/M)$ et $P(B/M)$, probabilités conditionnelles de A et de B sachant M .

5° Un testeur permet de déterminer avant la fabrication d'une pièce si une machine est déréglée ou non. Malheureusement, ce testeur se trompe avec une probabilité 0,1 (la probabilité que le testeur détecte un dérèglement alors que la machine est bien réglée est égale à la probabilité que le testeur conclue à un bon réglage alors que la machine est déréglée et est égale à 0,1).

Quelle est alors la probabilité qu'une machine soit réellement déréglée alors que le testeur l'indique ?

D₂ 84

DURÉE : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

Prévoir 2 feuilles de papier millimétré par candidat.

A. MATHÉMATIQUES

I

On considère la fonction t définie sur $\mathbb{R}$

$$x \mapsto t(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1° Étudier cette fonction et en tracer une représentation graphique.

2° Soit x et y des nombres réels. Démontrer la relation

$$t(x+y) = \frac{t(x) + t(y)}{1 + t(x)t(y)}$$

II

On se propose d'étudier les fonctions numériques f définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes :

a. Quel que soit le nombre réel x ,

$$|f(x)| < 1$$

b. Quels que soient les nombres réels x et y ,

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$$

1° Déterminer $f(0)$.

2° On suppose f continue en 0; démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3° On suppose DÉSORMAIS f dérivable en 0; démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4° Démontrer que f est monotone.

5° Démontrer que f est impaire.

6° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

Démontrer que, quel que soit le nombre réel h , le rapport $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ est indépendant de x .

En déduire g , puis f .

Tournez la page S. V. P.

B. STATISTIQUE

I

Une firme fabrique un même moteur dans deux usines A et B. Pendant une période donnée, la première A a fabriqué 1 000 moteurs avec un pourcentage de défectueux de 5 %, la seconde B, 2 000 avec un pourcentage de défectueux de 8 %.

Soit un moteur, choisi « au hasard » (c'est-à-dire avec équiprobabilité) parmi les 3 000 fabriqués, qui est défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait été fabriqué par l'usine A ?

II

Pour ouvrir une porte, on dispose d'un trousseau de clefs, contenant, parmi les n qui le composent, celle qui ouvre ladite porte, mais on ignore quelle est cette bonne clef.

On peut adopter l'une des deux stratégies suivantes :

1^{re} stratégie : à chaque étape, on tire une clef « au hasard » (c'est-à-dire avec équiprobabilité) et, en cas d'échec, on la replace dans le trousseau;

2^e stratégie : à chaque étape, on tire une clef « au hasard » (c'est-à-dire avec équiprobabilité) parmi celles qui restent, et en cas d'échec, on la met de côté.

Soient N_1 et N_2 , les variables aléatoires « nombre d'essais nécessaires dans la stratégie i » ($i = 1, 2$).

1° Déterminer les lois de probabilités de N_1 et de N_2 .

2° Calculer $E(N_1)$ et $E(N_2)$.

3° Quelle stratégie vous semble préférable ?

III

Un avion peut transporter 50 passagers et leurs bagages. Il pèse à vide (équipage et carburant compris) 125 tonnes.

Lors d'un voyage, les places sont toutes réservées et on admet que le poids de chaque voyageur est une variable aléatoire d'espérance 70 kg et d'écart-type 10 kg, tandis que celui de leur bagage est une variable aléatoire d'espérance 20 kg et de même écart-type 10 kg, ces variables aléatoires étant indépendantes entre elles.

1° Calculer l'espérance et l'écart-type du poids total de l'avion avant le décollage.

2° Sachant que cet avion ne peut décoller si son poids total dépasse 130 tonnes, donner un majorant de la probabilité pour que le décollage ait lieu (on utilisera l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

D₂ 1983D₃

DURÉE : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

Prévoir 2 feuilles de papier millimétré par candidat.

A. MATHÉMATIQUES

I

On appelle b_i le maximum des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne d'une matrice M , et B le minimum des nombres b_i .

On appelle a_j le minimum des éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M , et A le maximum des nombres a_j .

Comparer A et B .

II

Soit f la fonction numérique de deux variables réelles définies pour

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

par la formule

$$f(x, y) = x(1 - xy) + y$$

1. Tracer les lignes de niveau correspondant aux valeurs 1 et 0 de la fonction f .

2. Déterminer le maximum et le minimum de f .

3. On donne à y une valeur déterminée y_0 .

Déterminer le minimum et le maximum de f .

On notera $m(y_0)$ ce minimum et $M(y_0)$ ce maximum.

4. Quel est, lorsque y_0 varie, le maximum de $m(y_0)$? le minimum de $M(y_0)$?

Tournez la page S. V. P.

D₂ (83.) (note)

5. On donne à x une valeur déterminée x_0 .
Déterminer le minimum et le maximum de f .
On note $p(x_0)$ ce minimum et $P(x_0)$ ce maximum.
6. Quel est, lorsque x_0 varie, le maximum de $p(x_0)$? le minimum de $P(x_0)$?

B. STATISTIQUES

I

Dans une gare routière, on a relevé le nombre d'autobus arrivant au cours des quarts d'heure successifs :

Nombre d'autobus arrivant dans une période d'un quart d'heure.....	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de quarts d'heure où cet événement s'est produit.....	5	6	8	7	11	10	10	8	6	4

- 1° Représenter graphiquement cette série statistique.
- 2° Déterminer le mode, la médiane et la moyenne de cette série.

II

On suppose que le nombre d'autobus arrivant dans cette gare au cours d'un quart d'heure est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est une loi de Poisson de paramètre μ donné. On admet que le nombre d'autobus arrivant un quart d'heure donné est indépendant du nombre des autobus arrivés les quarts d'heures précédents.

Chaque autobus contient k passagers, $k = 0, 1, 2, \dots$

On donne les probabilités p_k qu'un autobus contienne k passagers, $\left(\sum_{k \geq 0} p_k = 1 \right)$.

- 1° Préciser la probabilité pour que le nombre d'autobus arrivant à la gare un quart d'heure donné soit égal à n .
- 2° Trouver la probabilité que, pendant un quart d'heure où le nombre d'autobus qui est arrivé à la gare est n , le nombre de ceux d'entre eux qui contiennent k passagers soit égal à t .
- 3° Calculer la probabilité que, pendant un quart d'heure donné, le nombre d'autobus arrivant à la gare soit égal à n et que t d'entre eux contiennent k passagers.
- 4° Calculer la probabilité que le nombre d'autobus contenant k passagers arrivant pendant un quart d'heure donné soit égal à t .
- 5° Déterminer la probabilité que, pendant un quart d'heure où le nombre des autobus contenant k passagers est égal à t , le nombre total des autobus arrivant à la gare soit égal à n .

ENSET D₂ et D₃

Session 1982

Durée : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.
 Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.
 Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A. MATHÉMATIQUES

Toutes les suites considérées dans ce problème sont des applications de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$; autrement dit, le premier terme de la suite (u_n) est noté u_1 et le $n^{\text{ième}}$ est noté u_n . L'espace vectoriel des suites ainsi définies est noté E.

A toute suite (u_n) on associe la suite (u'_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u'_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

I.1. Calculer (u'_n) lorsque :

- a. $u_n = 4$;
- b. $u_n = n$;
- c. $u_n = (-1)^n$.

I.2. L'application qui à une suite (u_n) associe (u'_n) est-elle une bijection sur E ? Est-elle une application linéaire de E dans E ?

II.1. Que peut-on conclure sur (u'_n) si l'on sait que (u_n) est croissante ? Si l'on sait que (u_n) est décroissante ?
 Si l'on sait que (u_n) est constante ?

2. Que peut-on conclure sur (u'_n) si l'on sait que (u'_n) est croissante ? Si l'on sait que (u'_n) est décroissante ?
 Si l'on sait que (u'_n) est constante ?

III.1. On suppose que (u_n) est convergente et de limite 0. Montrer qu'il en est de même de (u'_n) .

- 2. Que peut-on dire de (u'_n) si l'on suppose que (u_n) est convergente et de limite x ?
- 3. Que peut-on dire de (u'_n) si l'on suppose que (u'_n) est convergente et de limite x ?

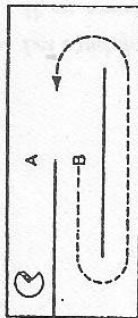
Tournez la page S. V. P.

B. STATISTIQUES

I

Une souris est placée à l'entrée d'un labyrinthe où elle a le choix entre deux couloirs :

- le couloir A la conduit à un morceau de fromage;
- le couloir B la ramène à son point de départ.



Si on suppose que la souris choisit « au hasard » (probabilité $1/2$ pour chacune des possibilités) son itinéraire et ceci quel que soit le nombre d'essais qu'elle a effectués (absence d'apprentissage) :

- 1° Déterminer la loi de probabilité du nombre E d'essais qu'elle fait, avant de trouver sa nourriture;
- 2° Déterminer la loi de probabilité du nombre N d'essais qu'elle fait pour trouver sa nourriture;
- 3° Calculer l'espérance mathématique de N;
- 4° Calculer la probabilité que la souris meure de faim (E infini).

II

On place la souris 10 jours de suite à l'entrée du labyrinthe et on note, chaque jour, le nombre d'essais dont elle se trouve pour se nourrir :

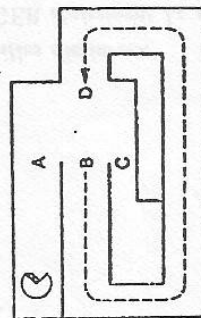
Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre d'essais	1	4	2	1	5	2	1	3	1	1

- 1° Représenter graphiquement cette série statistique.

- 2° Calculer sa moyenne et son écart-type.

III

On modifie le labyrinthe décrit en I en offrant à la souris une troisième possibilité C, celle de retourner dans sa cage.



On procède alors à la suite d'expériences suivantes :

Toutes les heures, on place la souris en D où elle peut :

- soit emprunter le couloir A et se nourrir;
- soit emprunter le couloir C et retourner dans sa cage jusqu'à la prochaine expérience;
- soit emprunter le couloir B et revenir en D où elle procède alors à un nouveau choix.

On arrête les expériences quand la souris s'est nourrie.

On suppose que la souris choisit chaque couloir avec la même probabilité constante au cours du temps.

- 1° Quelle est la probabilité que la souris se nourrisse au cours de la première expérience?
- 2° Quelle est la loi de probabilité du nombre de passages en D au cours d'une expérience?
- 3° Quelle est la loi de probabilité du nombre N d'expériences nécessaires à la souris pour se nourrir?
- 4° Quelle est la probabilité que la souris ne se nourrisse pas pendant un jour?

DURÉE : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A. MATHÉMATIQUES

1. Une entreprise fabrique deux produits A et B à partir de deux facteurs de production U et V.

La fabrication d'une unité de produit A consomme :

4 unités de U et 6 unités de V.

La fabrication d'une unité de produit B consomme :

6 unités de U et 3 unités de V.

1.1. On dispose d'un stock S_1 de 16 unités de facteur U
et de 12 unités de facteur V.

Existe-t-il un programme de production de produits A et B qui épuise exactement le stock? Déterminer ce programme.

1.2. Reprendre la question précédente (1.1.) mais avec un stock :

$$S_2 = \{ 14 \text{ unités de U et } 3 \text{ unités de V} \}$$

1.3. Soit $S = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ le stock de facteurs disponibles. Exprimer en langage algébrique la condition que doit remplir S pour qu'il existe un programme de fabrication de A et de B qui épuise exactement le stock.

2. L'entreprise fabrique également un troisième produit C. La fabrication d'une unité C consomme :

4 unités de U et 1 unité de V.

On dispose d'un stock S_3 de facteurs de production composé de :

30 unités de U et de 10 unités de V.

2.1. Quels sont les programmes $[x; y; z]$ (respectivement quantités de biens A; B; C produits) qui consomment exactement le stock disponible?

On observera que les équations ne déterminent pas x , y et z . On pourra par exemple exprimer x et y en fonction de z puis déterminer l'intervalle de variation possible de z .

2.2. La fabrication d'une unité de bien A procure un bénéfice de 3 F,

celle d'une unité de bien B procure un bénéfice de 4 F,

celle d'une unité de bien C procure un bénéfice de 5 F.

Déterminer le programme (x, y, z) de fabrication qui épuise exactement le stock S_3 et procure le bénéfice maximum.

Tournez la page S. V. P.

B. STATISTIQUES

I

Soit le prix de vente d'un article relevé dans dix magasins à deux époques t_1 et t_2 :

Magasins.....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Époque t_1	23	21	26	22	23	28	25	24	26	27
Époque t_2	25	21	28	21	23	29	23	23	27	27

1° Calculer la moyenne et l'écart type de ces deux séries statistiques.

2° D'après des enquêtes, les services fiscaux attribuent, pour chaque année, un coefficient à chaque point de vente; ce coefficient est censé être proportionnel au nombre d'articles vendus dans le magasin et sera considéré comme tel dans la suite :

Magasins.....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coefficient à t_1	3	5	2	4	3	1	3	3	2	2
Coefficient à t_2	3	5	1	5	3	1	4	3	2	2

Que proposez-vous alors comme prix moyen de l'article aux époques t_1 et t_2 ? Soient m_1 et m_2 ces prix moyens.

3° Calculer les indices de Laspeyres et de Paasche du prix de cet article, base 100 à t_1 .

Quel est l'indice le plus élevé? Ce résultat était-il prévisible?

II

Soit N une variable aléatoire normale centrée réduite.

1° Calculer $P(|N| < 2)$, $P(-0,5 < N \leq 1)$, $P(-0,5 \leq N \leq 1)$ et $P(0,784 < N < 1,214)$.

2° Déterminer a tel que $P(-a < N < a) = 0,5$.

3° Soit la variable aléatoire U définie par :

$$U = \begin{cases} -1 & \text{si } N < -1 \\ N & \text{si } -1 \leq N \leq 1 \\ 1 & \text{si } N > 1 \end{cases}$$

Exprimer, à l'aide de la fonction de répartition de la variable N , la fonction de répartition de la variable U . Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire U .

La variance de U est-elle supérieure ou inférieure à l'unité (variance de N)?

4° Soit la variable aléatoire $C = N^2$.

Calculer $P(C < c)$ en fonction de $P(N < c)$, où c est un nombre donné.

Déterminer la densité de probabilité de la variable C .

Calculer l'espérance mathématique de la variable C .

5° On suppose que la distribution des prix à l'époque t_i ($i = 1, 2$) suit une loi normale de moyenne $\underline{m}_i$ ($i = 1, 2$) et d'écart type σ_i , avec $\sigma_1 = 2,05$ et $\sigma_2 = 2,43$.

Quelle est la probabilité que le prix d'un article dépasse la valeur 25 F à l'époque t_1 ? à l'époque t_2 ?

6° A votre avis, le prix de l'article peut-il être considéré comme constant entre t_1 et t_2 ? Justifiez votre réponse.

091 712

D2 70 - 1696

DURÉE : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

Les candidats utiliseront du papier millimétré (2 feuilles).

A. MATHÉMATIQUES

I

On considère la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x) = e^{-x} (2x - x^2)$$

- I. 1. Calculer la dérivée de $f(x)$.
- I. 2. Étudier la variation de cette fonction, en tracer le graphe.

II

Primitive de $f(x)$

- II. 1. Trouver une fonction primitive de $f(x)$.
(On pourra par exemple former la dérivée de la fonction :

$$x \rightarrow F(x) = e^{-x} (a + bx + cx^2) \text{ et utiliser ce résultat.)}$$

Tournez la page S. V. P.

II. 2. Calculer $\int_0^2 f(x) dx$ et $\int_2^\infty f(x) dx$.

II. 3. On désigne par $h(x)$ la moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ avec $x \geq 0$.

On a donc :

$$h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du.$$

Pour quelle valeur $x_0 \geq 0$ cette moyenne atteint-elle son maximum?

Calculer le maximum $h(x_0)$, comparer à $f(x_0)$.

III

D'une manière plus générale soit $x \rightarrow f(x)$ une fonction définie et continue sur $x \geq 0$. On s'intéresse à l'ensemble des moyennes $h(x)$ sur les intervalles $[0, x]$ avec $x \geq 0$. Enfin on suppose que $h(x_0)$ est un optimum de $h(x)$ (maximum ou minimum). Quelle relation simple existe-t-il entre $h(x_0)$ et $f(x_0)$?

B. STATISTIQUE

I

Dans une station de métro, un distributeur automatique permet d'obtenir un ou deux tickets. Le nombre de voyageurs utilisant le distributeur en une minute est une variable aléatoire K dont la loi de probabilité est la suivante :

k	0	1	2	3	> 4
$P(K = k)$	0,15	0,45	0,3	0,1	0

1° Calculer l'espérance mathématique et la variance de K .

2° Soit N_t la variable aléatoire « nombre de voyageurs utilisant le distributeur en t minutes » :

$$N_t = \sum_{i=1}^t K_i \quad t \in \mathbb{N},$$

où K_i désigne le nombre (aléatoire) de voyageurs utilisant l'appareil pendant la minute i ; les variables aléatoires K_i étant indépendantes en probabilité et de même loi que K .

a. Déterminer la loi de probabilité de N_2 ;

b. Quelles sont les valeurs possibles pour N_t ?

c. Calculer $P(N_2 = 0)$;

d. Calculer $E(N_t)$ et $V(N_t)$;

e. Établir une borne inférieure de la probabilité p de l'événement $(N_t < N_t < 2t)$ grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichef.

3° On donne la loi de probabilité du nombre de billets achetés par chaque voyageur :

Nombre de billets.....	0	1	2
Probabilité correspondante..	0,1	0,7	0,2

Soit B le nombre total de billets achetés en une minute;

a. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de B sachant K .

b. En déduire la loi de probabilité de B et calculer son espérance mathématique.

II

On a observé, pendant une période de 15 minutes, les valeurs des variables K_i ($i = 1, \dots, 15$) :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k_i	0	1	1	1	2	1	2	3	0	1	3	0	3	2	2

1° Calculer la moyenne arithmétique des nombres k_i .

2° Ce nombre est-il une estimation de l'espérance mathématique de K ? est-elle sans biais? convergente?

940 912

19 + y. Sujet 12 - 13
De la part de M^{re} BURGIN -

J. 1768

Durée : 4 heures

N.B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A. MATHÉMATIQUES

I

Soit le système d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + 2z = d_1 \\ 2x \quad \quad + 2z = d_2 \\ x - 2y + z = d_3 \end{cases}$$

I.1. Résoudre le système; c'est-à-dire calculer x, y, z , en fonction de d_1, d_2, d_3 . On disposera clairement les calculs en indiquant la méthode.

I.2. On désigne par :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{la matrice du système (1)}$$

Déduire du résultat obtenu en I. 1. la matrice inverse de A.

Tournez la page S. V. P.

2° Calculer en fonction de p la probabilité P_2 que la procédure S_2 conduise à rejeter le lot.

II.3. Procédure S_3 : Elle est déduite de la procédure S_2 . Si le premier échantillon prélevé contient une lampe bonne et une défectueuse, on prélève de nouveau dans la caisse (après y avoir remis les lampes initialement prélevées) au hasard et avec remise, un nouvel échantillon de taille 2. Si les deux lampes sont bonnes, on met la caisse en vente; si les deux lampes sont défectueuses, on met la caisse au rebut; si une lampe est bonne et l'autre défectueuse, on itère le procédé en tirant un nouvel échantillon....

Calculer, en fonction de p , la probabilité P_3 que la procédure S_3 conduise à rejeter le lot.

II.4. Vérifier que la procédure S_3 est moins sélective que la procédure S_2 .

Quelles sont les valeurs de p pour lesquelles la procédure S_1 est plus sélective que la procédure S_2 ? Même question pour S_1 et S_3 .

I.3. On désigne par C_1 ; C_2 ; C_3 les vecteurs colonnes de A :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad C_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sans effectuer aucun nouveau calcul, dire si C_3 appartient à l'espace vectoriel engendré par C_1 et C_2 ; justifier la réponse.

II

On pose

$$S_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

II.1. Le vecteur S_3 appartient-il à l'espace vectoriel engendré par C_1 et C_2 ? Justifier la réponse.

On pose

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}; \quad \vec{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et l'on considère les systèmes (2) et (3).

$$(2) \quad C\vec{X} = \vec{O} \quad (3) \quad C\vec{X} = \vec{D}$$

II.2. Caractériser l'ensemble des solutions $\vec{X}$ de (2).

II.3. Quelle condition (en langage d'espace vectoriel) doit remplir $\vec{D}$ pour que le système (3) admette des solutions ?

II.4. Dans ce dernier cas, caractériser l'ensemble des solutions $\vec{X}$ du système (3).

B. STATISTIQUE

I

Soient les prix mensuels d'un produit au cours de l'année 1978 :

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
1,2	1,4	1,3	1,5	1,7	1,8	1,6	1,9	2,1	2	2,3	2,2

I.1. Calculer le prix moyen de ce produit au cours de l'année 1978.

I.2. On suppose que la progression du prix est linéaire au cours du temps. Déterminer alors le trend de la série chronologique pour l'année 1978.

II

Une caisse de cent lampes électriques contient une proportion p de lampes défectueuses. Pour décider si on met en vente ou non cette caisse, on propose les trois procédures suivantes.

II.1. Procédure S_1 : On prélève au hasard une lampe dans la caisse et on décide de mettre en vente la caisse selon que cette lampe est bonne ou défectueuse.

Calculer, en fonction de p , la probabilité P_1 que la procédure S_1 conduise à rejeter le lot.

II.2. Procédure S_2 : On prélève dans la caisse, au hasard et avec remise, un échantillon de taille 2. On décide alors :

- si les lampes prélevées sont bonnes, de mettre la caisse en vente;
- si les lampes prélevées sont défectueuses, de mettre la caisse au rebut;
- si l'une des lampes est bonne et l'autre défectueuse, de prélever un nouvel échantillon de taille 2 dans la caisse, au hasard et avec remise, après avoir remis dans la caisse le premier échantillon. Si les deux lampes alors prélevées sont bonnes, on met la caisse en vente; sinon on la met au rebut.

1° Calculer en fonction de p la probabilité de chacun des trois événements suivants :

- a. Les deux lampes d'un échantillon sont défectueuses;
- b. L'une des lampes est bonne, l'autre défectueuse;
- c. Les deux lampes sont bonnes.

Tournez la page S. V. P.

Durée : 4 heures

N. B. — Les candidats sont priés de rédiger les parties A et B sur des feuilles distinctes.

Il est recommandé de LIRE soigneusement l'énoncé et de RÉDIGER clairement la solution.

Il sera accordé la plus grande importance à la justification des résultats et à la rédaction de la copie.

A. MATHÉMATIQUES

I. Algèbre linéaire.

On donne le système d'équations :

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = u \\ x + y + \lambda z = v \\ x + y - z = w \end{cases}$$

1° Résoudre et discuter ce système suivant les valeurs de λ , u , v et w .

2° En déduire, si elle existe, l'inverse de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3° Déterminer, suivant les valeurs de λ , la dimension et une base du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs-colonnes de cette matrice.

Tournez la page S. V. P.

II. Analyse.

1° On définit la suite récurrente u_n par :

$$u_n = a u_{n-1} \quad u_0 = 1 \quad a \in \mathbf{R}$$

a. Déterminer u_n en fonction de n et de a .

b. Étudier, suivant les valeurs de a , la croissance de cette suite et calculer sa limite éventuelle.

c. Déterminer a tel que u_6 soit égal à 7,594.

2° On définit la suite récurrente v_n par :

$$v_n = \frac{1}{2} v_{n-1} + 1 \quad v_0 = b \quad b \in \mathbf{R}$$

Étudier sa croissance et calculer sa limite éventuelle, suivant les valeurs de b .

B. STATISTIQUE

I. On a noté les résultats suivants en observant une série double (x_i, y_i) sur dix individus :

i	x_i	y_i
1.....	0,13	2,08
2.....	0,45	3,02
3.....	0,78	0,97
4.....	1,85	0,27
5.....	0,40	4,46
6.....	0,22	0,57
7.....	1,24	0,87
8.....	1,13	0,66
9.....	0,32	0,17
10.....	1,46	0,76

1° Calculer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des deux séries.

2° Calculer l'écart-type σ_x de la série des x_i .

3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire r_{xy} entre les deux séries sachant que : $\sigma_y \simeq 1,32$.

4° Donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés. Que peut-on penser de la validité de cet ajustement.

II. On considère un couple de variables aléatoires indépendantes (X, Y) .

1° Sachant que X et Y suivent une loi exponentielle, calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X , sa variance $V(X)$ et la covariance $\text{cov}(X, Y)$ entre X et Y .

2° On pose $Z = \frac{1}{2}(X + Y)$; calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

3° Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire Z .

III. En supposant que la série de la première partie est un 10-échantillon d'un couple (X, Y) de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre c , estimer la valeur de ce paramètre et donner les propriétés de l'estimateur choisi.

