C01-Quiz

Exercice 1. Qui est la disjonction ? Qui est la conjonction ?
"ET" ? "OU" ?
Et le symbole, c'est quoi déjà ?
$\wedge$? $\vee$?

Exercice 2. $P \Rightarrow Q$ équivaut à ...

Exercice 3. Rappeler les lois de de Morgan.

Exercice 4. Quelles sont les négations de

$$\neg(\forall x \in E)$$
$$\neg(\exists x \in E)$$

Exercice 5. Traduire en terme des parties de E la propriété :

$$X \subset E$$

Exercice 6. Rappeler la définition de la différence symétrique.

Exercice 7. Rappeler à quelle condition une relation binaire entre deux ensembles E et F est une fonction. Idem avec une application.

Exercice 8. Rappeler les définitions d'applications injectives, surjectives et bijectives.

Exercice 9. Rappeler la définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application f.

Exercice 10. Rappeler les définitions d'une relation binaire réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

Exercice 11. Parmi les multiples qualités d'une relation d'équivalence, il y en a trois qui la caractérise. Lesquelles ?

Exercice 12. Parmi les multiples qualités d'une relation d'équivalence, il y en a trois qui la caractérise. Lesquelles ?

Exercice 13. Rappeler la définition d'une classe d'équivalence.

Exercice 14. Quelles sont les propriétés caractéristiques d'une relation d'ordre ?

Exercice 15. La relation "$>$" est-elle une realtion d'ordre sur $\mathbb{R}$?

Exercice 16. Faites-vous la différence entre un ordre total et un ordre partiel ?

Exercice 17. Rappeler la définition d'un minorant, d'un minimum, d'une borne inférieure, d'un majorant, d'un maximum, d'une borne supérieure. Ouf!

Réponses

Exercice 1 : On note la conjonction $\wedge$ qui signifie "ET" et la disjonction $\vee$ qui veut dire "OU".
La logique, "C'et D ou" (C'est doux)
Exercice 2 : $P \Rightarrow Q$ équivaut à $Q \vee \neg P$
Exercice 3 : $\neg(P \vee Q)$ équivaut à $(\neg P) \wedge (\neg Q)$
$\neg(P \wedge Q)$ équivaut à $(\neg P) \vee (\neg Q)$
Exercice 4 : $\neg(\forall x \in E/P(x))$ équivaut à $(\exists x \in E/\neg P(x))$
$\neg(\exists x \in E/P(x))$ équivaut à $(\forall x \in E/\neg P(x))$
Exercice 5 : $X \subset E \quad \Leftrightarrow \quad S \in \mathscr{P}(E)$
Exercice 6 :

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= (A \cup B) \backslash (A \cap B). \end{aligned}$$

Exercice 7 : On dit qu'une relation de E sur F est une **fonction** de E vers F si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ (i.e. un seul $y \in F$ ou aucun) tel que $x\mathcal{R}y$.
Une relation de E sur F est une **application** de E vers F si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}y$
Exercice 8 : Soit f une application de E sur F.
- L'application f est dite **injective** si et seulement si $\forall (x,x') \in E^2 \quad x \neq x' \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x')$. (Ceci est équivalent à : $\forall (x,x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$)
- L'application f est dite **surjective** si et seulement tout élément de F admet au moins un antécédent (i.e. $f(E) = F$).
- L'application f est **bijective** si et seulement si f est injective et surjective (i.e. pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$).
Exercice 9 : On peut définir **l'image réciproque** d'une partie B de F par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E /\; f(x) \in B\}$$

<u>Attention !</u> f^{-1} n'est pas, en général une application!! (sauf si f est bijective

Exercice 10 : Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$. On dit que

$\mathcal{R}$ est **réflexive** si et seulement si $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$

$\mathcal{R}$ est **symétrique** si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \;\Rightarrow\; y\mathcal{R}x$

$\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si et seulement si

$\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \;\Rightarrow\; x = y$

$\mathcal{R}$ est **transitive** si et seulement si

$\forall (x,y,z) \in E^3, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \;\Rightarrow\; x\mathcal{R}z$

Exercice 11 : Réflexive, symétrie et transitive

Exercice 12 : Réflexive, symétrie et transitive

Exercice 13 : Soit $x \in E$ et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On définit la **classe d'équivalence** de x modulo $\mathcal{R}$ comme l'ensemble

$$Cl(x) = \mathring{x} = \{y \in E / \; x\mathcal{R}y\}.$$

Exercice 14 : Réflexive, antisymétrique et transitive

Exercice 15 : Nope. Elle n'est pas réflexive

Exercice 16 : Un ordre est total si on peut toujours comparer deux éléments de l'ensemble quels qu'ils soient.
Il est dit partiel sinon

Exercice 17 : Soit E un ensemble ordonné par la relation $\preccurlyeq$. Soit A un sous-ensemble de E.
- S'il existe $m \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $m \preccurlyeq x$, alors m est <u>le</u> **plus petit élément** ou minimum de A.
- S'il existe $M \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $x \preccurlyeq M$, alors M est <u>le</u> **plus grand élément** ou maximum de A.
- S'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in A$, $m \preccurlyeq x$, alors m est <u>un</u> **minorant** de A. Le plus grand des minorants de A est appelé la **borne inférieure** de A. On le note $\inf(A)$.
- De la même manière, s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $x \in A$, $x \preccurlyeq M$, alors M est <u>un</u> **majorant** de A. Le plus petit des majorants de A est appelé la **borne supérieure** de A. On le note $\sup(A)$.