Logique formelle - Théorie des ensembles - Relations binaires

Leçon 1
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Dans cette leçon, on introduit l'essentiel de la logique, la théorie des ensembles et le vocabulaire de base ...

Table des matières

I Logique formelle

I.1 Vocabulaire de base

Définition 1.1 *Une* ***proposition*** *est un énoncé dont on peut affirmer sans ambigüité qu'il est vrai ou faux.*

Exemples: "Ma voiture de course roule à plus de $200km.h^{-1}$", "$\pi \in \mathbb{N}$".

Contre Exemples: "Ma voiture roule vite.", "La constante γ est transcendante."

Remarque: Depuis Aristote, la logique se base sur le **tiers exclu** qui dit qu'une proposition est soit vraie soit fausse.

Définition 1.2 *Un* ***axiome*** *est une proposition dont on pose, a priori, la vérité.*

La différence entre postulat et axiome est plus d'autre philosophique que mathématique. On dira globalement qu'un axiome a un caractère indubitable universel quand le postulat se rapporte plus à une concession faite dans un groupe au développement d'un raisonnement. Par exemple, je peux partir du postulat qu'il fait toujours beau à Melbourne pour inciter les gens à y aller. Je vais avoir du mal à poser cette affirmation comme axiome.

Quelques proposition démontrables : Théorèmes, corollaires, lemmes, sorites...

I.2 Les connecteurs logiques

On suppose ici que P et Q sont deux propositions mathématiques.

Définition 1.3 *La* ***négation*** *de P, que l'on écrit "non P" est notée $\neg P$.*
La ***conjonction****, "P et Q" est notée $P \wedge Q$.*
La ***disjonction****, "P ou Q" est notée $P \vee Q$.*

Procédé mnémotechnique : ou=o$\vee$.
Tables de vérité :

Négation	P	$\neg P$
	vraie	*fausse*
	fausse	*vraie*

Conjonction	P	Q	$P \wedge Q$
	vraie	*vraie*	*vraie*
	fausse	*vraie*	*fausse*
	vraie	*fausse*	*fausse*
	fausse	*fausse*	*fausse*

ou avec des tableaux à double entrées :

P et Q

	P est vraie	P est fausse
Q est vraie	$P \wedge Q$ vraie	$P \wedge Q$ fausse
Q est fausse	$P \wedge Q$ fausse	$P \wedge Q$ fausse

P ou Q

	P est vraie	P est fausse
Q est vraie	$P \vee Q$ vraie	$P \vee Q$ vraie
Q est fausse	$P \vee Q$ vraie	$P \vee Q$ fausse

Définition 1.4 *L'****implication****, notée $P \Rightarrow Q$ équivaut à $Q \vee (\neg P)$.*

Exemple: Prenons une proposition Q classique : "Il y a des nuages." et une proposition P non moins classique : "Il pleut."

On peut partir du fait que "P implique Q" est vraie. Et ceci est bien équivalent à : $Q \vee (\neg P)$. Autrement dit, "Il y a des nuages ou il ne pleut pas." En effet, si cette dernière affirmation est vraie, cela veut dire d'après les tables de vérités précédentes, que :
- soit Q est vraie et $\neg P$ est fausse : Il y a des nuages et il pleut.
- soit Q est fausse et $\neg P$ est vraie : Il n'y a pas de nuages et il ne pleut pas.
- soit Q est vraie et $\neg P$ est vraie : Il y a des nuages et il ne pleut pas.

Il existe trois méthodes pour démontrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie :
- On suppose que "P est vraie" et on montre que "Q est vraie" (raisonnement direct).
- On suppose que "Q est fausse" et on montre que "P est fausse" (raisonnement par contraposée).
- On suppose que "Q est fausse et P est vraie" et on en déduit un résultat absurde. Ainsi, si "P est vraie", nécessairement, "Q est vraie" (raisonnement par l'absurde).

Définition 1.5 *On a* ***équivalence*** *entre P et Q quand $(P \Rightarrow QetQ \Rightarrow P)$. On note alors $P \Leftrightarrow Q$.*

Proposition 1.6

$$\begin{array}{rcl} \neg(P \vee Q) & \textit{équivaut à} & (\neg P) \wedge (\neg Q) \\ \neg(P \wedge Q) & \textit{équivaut à} & (\neg P) \vee (\neg Q) \\ \neg(\forall x \in E / P(x)) & \textit{équivaut à} & (\exists x \in E / \neg P(x)) \\ \neg(\exists x \in E / P(x)) & \textit{équivaut à} & (\forall x \in E / \neg P(x)) \end{array}$$

Exercice 1. *Trouver un exemple pour illustrer chacune des quatre équivalences précédentes.*

II Théorie des ensembles

Définition 1.7 *Une partie F d'un ensemble E est un sous-ensemble de E. Autrement dit, tout ensemble constitué d'objets de E. On note $F \subset E$.*
L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Exemple: { Romain Beccucci, Thierry Sageaux } est une partie de l'ensemble des professeurs de ENSD2. On dit même qu'il s'agit d'une **paire** ou d'un **couple**... enfin, si on veut. Quand il n'y a qu'un seul élément dans la partie, on parle de **singleton**.
Si l'on considère l'ensemble de mes amis $E = \{\text{Anatole}, \text{Bucéphale}, \text{Callixte}\}$, on trouve l'ensemble des parties de E qui contient huit éléments :
$P(E) = \{\emptyset, \{\text{Anatole}\}, \{\text{Bucéphale}\}, \{\text{Callixte}\}, \{\text{Anatole}, \text{Bucéphale}\}, \{\text{Anatole}, \text{Callixte}\}, \{\text{Bucéphale}, \text{Callixte}\}, \{\text{Anatole}, \text{Bucéphale}, \text{Callixte}\}\}$

Remarque: On remarque donc que $\mathcal{P}(E)$ est un **ensemble d'ensembles**! Et que

$$\boxed{X \in \mathcal{P}(E) \quad \Leftrightarrow \quad X \subset E}.$$

Exercice 2. *Conjecturer le nombre de parties d'un ensemble à $n \in \mathbf{N}$ éléments.*

Définition 1.8 *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit A **privé de** B par*

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}.$$

On peut aussi utiliser la notation $A - B$, plus ambiguë...
*On définit la **différence symétrique** par*

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= (A \cup B) \backslash (A \cap B). \end{aligned}$$

Exercice 3.
1) Distributivité de l'intersection sur la différence symétrique.
Montrer que $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.
2) Se convaincre que la distributivité de la réunion sur la différence symétrique est fausse à l'aide d'un diagramme de Venn.

Définition 1.9 *Soient E et F deux ensembles, le **produit cartésien** de ces deux ensembles est l'ensemble des couples (e, f) avec $e \in E$ et $f \in F$. On note $E \times F = \{(e, f),\ e \in E \text{ et } f \in F\}$.*
Lorsqu'aucun doute n'est permis, on note $E \times E = E^2$

Définition 1.10 *Soit I est un ensemble dénombrable (fini ou pas) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties non vides distinctes de E. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement** de E si $E \subset (\cup_{i \in I} A_i)$ (il y a même égalité ici !).*
*Avec le mêmes hypothèses, on dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de E si les A_i forment un recouvrement disjoint de E. A savoir que $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$.*

Remarque: Une partition d'un ensemble n'est ni plus ni moins qu'un "saucissonnage" dudit ensemble.

III Applications

Définition 1.11 *On dit qu'une relation de E sur F est une* ***fonction*** *de E vers F si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ (i.e. un seul $y \in F$ ou aucun) tel que $x\mathcal{R}y$.*
Une relation de E sur F est une ***application*** *de E vers F si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}y$.*
L'élément y est appelé ***l'image*** *de x par $\mathcal{R}$.*
L'élément x est appelé un ***antécédent*** *de y par $\mathcal{R}$.*

Remarque: Encore une fois, bien faire attention à l'unicité de l'image, mais pas de l'antécédent.

Définition 1.12 *Soit f une application de E sur F.*
- L'application f est dite ***injective*** *si et seulement si $\forall(x,x') \in E^2 \quad x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$. (Ceci est équivalent à : $\forall(x,x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$)*
- L'application f est dite ***surjective*** *si et seulement tout élément de F admet au moins un antécédent (i.e. $f(E) = F$).*
- L'application f est ***bijective*** *si et seulement si f est injective et surjective (i.e. pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$).*
On peut alors définir la ***bijection réciproque*** *de f :*

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad & F \longrightarrow E \\ & y \longmapsto x \end{aligned}$$

Remarque: Avec les mêmes hypothèses, d'une façon générale, on peut définir **l'image réciproque** d'une partie B de F par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / \ f(x) \in B\}$$

Attention ! Dans ce cas, f^{-1} n'est pas, en général une application!!

Exemple: Si l'on prend le tas de vos copies au prochain DS. Le professeur va se transformer en application : à chaque copie, il va associer une note. L'ensemble de départ E est donc les copies et l'ensemble d'arrivée, $F = [0, 20]$ les notes. Si l'on veut savoir qui a eu plus de la moyenne, il suffit de considérer $B = [10, 20]$ et son image réciproque : $f^{-1}(B)$ qui est bien l'ensemble des copies qui ont eu plus de la moyenne.

Exercice 4.
A quelle condition sur $f : E \longrightarrow F$ a-t-on $f^{-1}(F) = E$?

Exercice 5.
1) Soient A et B deux parties d'un ensemble E et soit f une application de E dans E.
  a) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
  b) Montrer que $A \subset f^{-1}[f(A)]$.
  Dans la suite, B est une partie de E.
2) Montrer que les deux inclusions précédentes sont des égalités si f est injective.
3) Montrer que $f[f^{-1}(B)] = B \cap f(E)$.
4) En déduire que si f est surjective, alors $f[f^{-1}(B)] = B$.

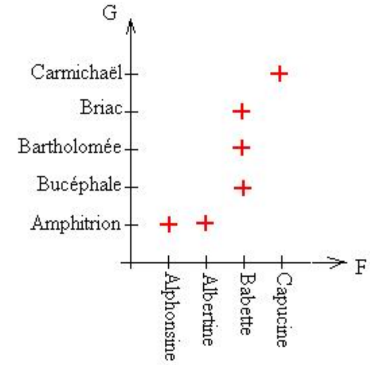
IV Relations binaires

IV.1 Défintion

Définition 1.13 *Soit E et F deux ensembles. On appelle* ***relation binaire****, notée $\mathcal{R}$, entre deux éléments de E et F toute propriété définie sur $E \times F$ caractérisant les éléments d'un sous-ensemble G de $E \times F$, appelé* ***graphe*** *de la relation.*

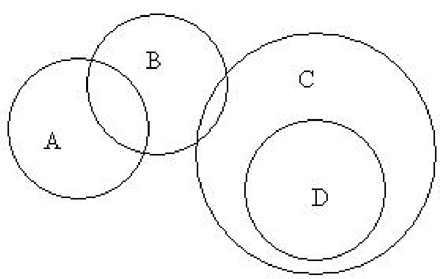
$$\forall (x,y) \in E \times F \quad x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; (x,y) \in G \tag{1}$$

Exemple: Au pays des Zétéros, on crée une relation binaire sur l'ensemble
$F = \{$Alphonsine,Albertine,Babette,Capucine$\}$ et l'ensemble
$G = \{$Amphitrion,Bucéphale,Bartholomée,Briac,Carmichaël$\}$ en n'imposant que des couples ayant la même initiale.
Ecrire le graphe de cette relation. Combien compte-t-il d'éléments ?



Un cas particulier classique est lorsque l'on crée une relation binaire sur le même ensemble $E = F$. On parle alors de relation binaire sur E (ou dans E)

Exercice 6. *Soient A, B, C et D quatre ensembles dont les positions respectives sont précisées par le diagramme d'Euler suivant :*



Posons $E = \{A, B, C, D\}$ et considérons la relation binaire $\mathcal{R}$: $X\mathcal{R}Y \quad \Leftrightarrow \quad X \cap Y \neq \emptyset$ avec $X \in E$, $Y \in E$.
Construire le graphe $G_{\mathcal{R}}$ de cette relation.

Définition 1.14 *Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$. On dit que*
$\mathcal{R}$ est ***réflexive*** *si et seulement si $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$*
$\mathcal{R}$ est ***symétrique*** *si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \;\Rightarrow\; y\mathcal{R}x$*
$\mathcal{R}$ est ***antisymétrique*** *si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \;\Rightarrow\; x = y$*
$\mathcal{R}$ est ***transitive*** *si et seulement si $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \;\Rightarrow\; x\mathcal{R}z$*

Remarque: Il conviendra de faire bien attention à la différence qui existe entre la symétrie (qui doit être vérifiée pour tout couple (x,y)) et l'antisymétrie (qui dit que **si** $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$ - aucune raison que cela soit vrai pour tout couple (x,y). Cela dit juste que s'il y en a deux qui ont la propriété de symétrie, alors ils sont égaux).

Exercice 7.
Trouver le graphe d'une relation qui est symétrique et transitive mais pas réflexive sur trois éléments.

IV.2 Relations d'équivalence

Définition 1.15 *Une **relation d'équivalence** sur E est une relation binaire sur E, réflexive, symétrique et transitive.*

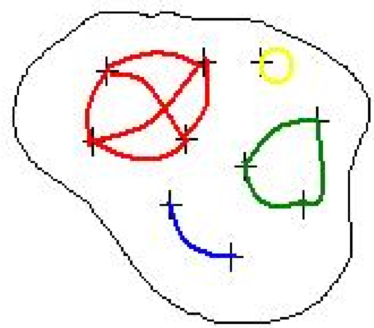
Définition 1.16 *Soit $x \in E$ et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On définit la **classe d'équivalence** de x modulo $\mathcal{R}$ comme l'ensemble*

$$Cl(x) = \mathring{x} = \{y \in E/\ x\mathcal{R}y\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ dans E est noté $E/\mathcal{R}$.

Remarque: Une classe d'équivalence n'est jamais vide car elle contient toujours au moins l'élément x engendrant la classe.

Remarque: La bonne idée à garder en tête est celle de l'**amitié**. En effet, on peut estimer que l'on est ami avec soi-même (réflexivité). De plus, si l'on imagine que, dans un monde parfait, l'amitié est bilatérale, on a la symétrie. Et en suivant Hervé Bazin qui dit que "Les amis de mes amis sont mes amis", on a la transitivité. Ma classe d'équivalence est alors le groupe de mes amis.



Remarque: Les classes d'équivalence d'un ensemble E pour une relation $\mathcal{R}$ donnée forment une partition de E.

Exercice 8.

Soit E un ensemble fini. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$A\mathcal{R}B \quad \Leftrightarrow \quad \text{card}(A\Delta B) \text{ est pair.}$$

Est-ce une relation d'équivalence ?

IV.3 Relation d'ordre

Définition 1.17 *Une **relation de préordre** est un relation binaire réflexive et transitive.*

Définition 1.18 *Une **relation d'ordre** sur E est une relation binaire, réflexive, antisymétrique et transitive. On dit alors que E est **ordonné**.*

Définition 1.19 *Si E est muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ et si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, on dit que l'ordre est **total**.*
*Dans le cas contraire, on dit qu'il est **partiel**.*

Exemples: • "$\leq$" est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

• La relation "divise" est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$. En effet, si on a bien $2\mathcal{R}4$, en revanche, on ne peut pas comparer 2 et 3 car "2 ne divise pas 3" et "3 ne divise pas 2".

• Sur l'ensemble des être humains, on crée la relation d'ordre suivante : "Un individu A est supérieur à un individu B s'il parle toutes les langues que parle B". Il s'agit bien d'une relation d'ordre et elle est partielle parce que l'on ne peut pas comparer Raoni Mektutire, chef des Kayapos d'Amazonie avec vous. En effet, il ne parle que le kayapo, un peu l'anglais et le portugais. Vous parlez le français mais pas le kayapo que je sache ! !

Contre Exemple: "$<$" n'en est pas une... Pourquoi ?

Exercice 9.

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq |y|$. Est-ce une relation d'ordre ?

Remarque: Pour déterminer si une relation d'ordre est partielle ou totale, il suffit de tenter de comparer deux éléments de E. Si on peut toujours les comparer, alors on dit qu'il est total. Sinon, il faut exhiber un contre exemple.

Définition 1.20 *Soit E un ensemble ordonné par la relation $\preccurlyeq$. Soit A un sous-ensemble de E.*
- S'il existe $m \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $m \preccurlyeq x$, alors m est le ***plus petit élément*** *de A.*
- S'il existe $M \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $x \preccurlyeq M$, alors M est le ***plus grand élément*** *de A.*
- S'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in A$, $m \preccurlyeq x$, alors m est un ***minorant*** *de A. Le plus grand des minorants de A est appelé la* ***borne inférieure*** *de A. On le note $\inf(A)$.*
- De la même manière, s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $x \in A$, $x \preccurlyeq M$, alors M est un ***majorant*** *de A. Le plus petit des majorants de A est appelé la* ***borne supérieure*** *de A. On le note $\sup(A)$.*

Remarques: - Il convient de bien faire attention à la différence entre "un" et "le" dans les définitions ci-dessus. En effet, le plus petit élément est unique ! Pas les majorants en général.
- Tout ensemble fini non vide admet un plus petit et un plus grand élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (idem pour minorée).