Dénombrements

Leçon 2
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Dans cette leçon, on aborde tous les aspects du dénombrement en mettant l'accent sur la classification avec/sans ordre, avec/sans remise. Un exemple type regroupant tous ces cas est traité en fin de leçon ainsi que le cas général du multinôme.

Table des matières

I Introduction **1**

II Sans remise, avec ordre - Arrangements sans répétition **2**

III Sans remise, sans ordre - Combinaisons sans répétition **2**

IV Avec remise, avec ordre - Arrangements avec répétition **3**

V Avec remise, sans ordre - Combinaisons avec répétition **3**

VI L'exercice type ! **4**

VII Le multinôme **4**

VIII Le coin du guerrier **5**

I Introduction

L'objectif de cette leçon est de déterminer le nombre de façons de choisir p éléments dans un ensemble à n éléments. On imagine donc que l'on possède une liste $L = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de n éléments et l'on veut en extraire p éléments. Il y a deux façons de le faire :

- La première chose est de déterminer si on veut un résultat **ordonné**. C'est le cas lorsque l'on écrit : "tirer les uns après les autres...", "...successivement..." (On parle alors d'**arrangements**) et le résultat obtenu est une p-**liste** notée $(x_1, x_2, ..., x_p)$
- ou **non-ordonné**. Quand on écrit : "Tirer un ensemble, un paquet...", "...simultanément..." (on parle de **combinaisons à** p **éléments** notée $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$

Un petit procédé mnémotechnique qui vaut ce qu'il vaut : Dans COMBINAI**SO**NS, il y a "SO" comme **S**ans **O**rdre.

- La seconde chose est de déterminer si le tirage est **avec remise** : i.e. répétition possible des termes de la liste L
- ou **sans remise** : i.e. pas de répétition possible.

Voici quelques exemples concrets afin de fixer les idées :

	sans remise	avec remise
sans ordre	loto	yam
avec ordre	tiercé	cadenas

II Sans remise, avec ordre - Arrangements sans répétition

Exercice 1. ♪

Dans le cas du tiercé, faire un arbre pour trouver le nombre de façons de choisir un tiercé gagnant quand il y a 15 chevaux partants.

Théorème 2.1 *Le nombre d'**arrangements** de p éléments dans une liste à n éléments - on parle aussi de p-liste parfois - est :*

$$n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On note parfois (en France) le nombre d'arrangements : A_n^p.
*Dans le cas où $n = p$, on parle du nombre de **permutations** sur n éléments et on trouve $n!$ en appliquant la formule.*

La bonne idée pour comprendre ce qui se passe est de faire un arbre et de compter le nombre de branches.

Exercice 2. ♩

Quel est le nombre de mots de cinq lettres que l'on peut faire avec les lettres du mot SUPERMAN ? Avec le même mot, le nombre d'anagrammes ?
Plus dur : Le nombre d'anagrammes de BATMAN ? et de HARRY POTTER ?

Remarque: Il s'agit du nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

III Sans remise, sans ordre - Combinaisons sans répétition

Exercice 3. ♪

Déterminer le nombre de mains possibles (au premier tour) au poker (5 cartes sur 52).

Théorème 2.2 *Le nombre de **combinaisons sans répétition** de p éléments dans un ensemble à n éléments est*

$$\frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$$

On notait auparavant (en France) le nombre de combinaisons : C_n^p. Maintenant, la notation anglo-saxonne a pris le dessus et on lit "p parmi n".

Exercice 4. ♩

Quel est le nombre de grilles possibles au loto ? (5 numéros parmi 49 et un numéro "chance" parmi 10 possibles)

Rappel du triangle de Pascal :...

Proposition 2.3 *(Formules sur les combinaisons)*

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Exercice 5. ♪

Montrer la dernière par récurrence puis directement.

Proposition 2.4 *(Formule du binôme de Newton)*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Une application classique de la propriété précédente est le calcul du nombres de parties d'un ensemble à n éléments.

Proposition 2.5 *Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.*

Démonstration: Il suffit de dire que cela revient à compter le nombre de parties à k éléments (soit $\binom{n}{k}$) pour toutes les valeurs de k possible. Ainsi, on cherche à calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Il reste à spécialiser dans la formule du binôme par $a = b = 1$ et on obtient le résultat.

□

IV Avec remise, avec ordre - Arrangements avec répétition

Exercice 6. ♪
Déterminer le nombre de codes possibles pour mon cadenas (5 chiffres).

Théorème 2.6 *Le nombre d'arrangements avec répétition d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.*

On peut tracer là aussi un arbre pour retrouver la formule facilement.

Remarque: Il s'agit du nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

V Avec remise, sans ordre - Combinaisons avec répétition

Théorème 2.7 *Le nombre de combinaisons avec répétition d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.*

Remarque: Avec la formule des évènements contraires sur les combinaisons, on trouve aussi $\Gamma_n^p = \binom{n-1}{n+p-1}$
Le bon modèle a garder en tête ici est celui des p objets à ranger dans n tiroirs. Il suffit d'imaginer les objets rangés dans les tiroirs (sans ordre donc). A chaque objet on associe 1 et à chaque séparation de tiroir, on associe 0. On obtient ainsi un code binaire.

Par exemple, si on a 9 objets et 5 tiroirs, le code 1110101111100 signifie qu'il y a 3 objets dans le premier rangement, 1 dans le deuxième, 5 dans le troisième et rien dans les deux derniers.

La question du dénombrement revient donc à calculer le nombre de codes binaires avec p bits égaux à 1 et $n-1$ bits égaux à 0. Ce qui revient à calculer le nombre de façons de placer p chiffres 1 parmi $n-p+1$ emplacements.

Les applications sont multiples, en voici deux :

a) Le nombre Γ_n^p est le nombre de façons de décomposer l'entier p en somme de n entiers. Il suffit de voir le problème comme le rangement de p chiffres 1 dans n tiroirs. Plus généralement, on peut s'intéresser au nombre de façons de décomposer un entier n en somme d'entiers naturels. C'est le sujet traité dans l'addendum en fin de chapitre.

b) Ce nombre Γ_n^p est aussi le nombre de termes obtenus après le développement du multinôme $(a_1 + a_2 + ...a_n)^p$ (voir dernier paragraphe). En effet, les termes du développement sont de la forme : $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_n = p$.

Exercice 7. ♪
Quel est le nombre de dominos ?

Exercice 8. ♪
Quel est le nombre de résultats possibles au Yam ?

On voit que $\Gamma_n^0 = 1$, que $\Gamma_n^1 = n$, que $\Gamma_n^2 = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$ et $\Gamma_n^3 = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}$
Plus généralement,

Proposition 2.8 *On a la formule :*

$$\boxed{\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \sum_{k=p-1}^{n+p-2} \binom{k}{p-1}}$$

Exercice 9. ♪
Le chef du personnel d'une entreprise vient d'embaucher 18 ouvriers qu'il doit répartir entre les 4 ateliers de l'usine. Sachant qu'il doit affecter au moins 4 personnes à l'atelier 1, au moins 2 personnes aux ateliers 2 et 3 et au moins une personne à l'atelier 4, de combien de façons peut-il le faire en supposant que l'on ne s'intéresse qu'au nombre de personne par atelier et que le fait de savoir qui est à un atelier ne nous intéresse pas ?

VI L'exercice type !

Voici un exercice très classique regroupant tous les cas possibles de dénombrements. Il est bon de le travailler, retravailler et de prendre le temps de graver quelques neurones à ce modèle.

Exercice 10. ♩
Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façon peut-il le faire sachant que :

1) Chaque boîte aux lettres peut contenir au plus un prospectus et
  a) les prospectus sont distincts.
  b) Les prospectus sont identiques.
2) Chaque boîte aux lettres peut contenir un nombre quelconque de prospectus et
  a) les prospectus sont distincts.
  b) Les prospectus sont identiques.

Résumé :

	sans remise	avec remise
sans ordre	$\binom{n}{p}$	Γ_n^p
avec ordre	A_n^p	n^p

VII Le multinôme

On se propose de calculer le coefficient du multinôme.
Imaginons que l'on veuille développer

$$(a_1 + ... + a_p)^n.$$

Il est clair que tous les termes sont de la forme $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_p = n$. (on dit que le résultat est **homogène**, dans le sens où il n'y a pas des termes de degrés totaux différents) La proposition suivante donne le coefficient de ce terme dans le développement :

Proposition 2.9 *Le coefficient de $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}...a_p^{\alpha_p}$ est*

$$\boxed{\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_p!}}$$

On l'appelle le ***coefficient multinomial****.*

VIII Le coin du guerrier

Exercice 11. ♩
Montrer que $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}-1]}\binom{n}{2k+1}$ où $[\frac{n}{2}]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$

Exercice 12. ♩
Trouver une démonstration combinatoire de $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Exercice 13. ♩
Démontrer la formule suivante :

$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ par récurrence puis par une démonstration combinatoire.

Exercice 14. ♩ *Droites du plan et plans de l'espace.*
1) Soit n droites dans le plan en position générale (i.e. pas de points de concours de trois droites, pas de droites parallèles). Combien y a-t-il de points d'intersection ?
2) On se donne, là encore, n droites du plan en position générale . Déterminer le nombre $P(n)$ de régions du plan délimitées par ces droites.
3) Même question avec n plans dans l'espace en position générale (i.e. pas deux plans parallèles, pas trois plans concourants en une droite, pas quatre plans concourants en un point).

Exercice 15. ♩
Soit P un polygone convexe général à n sommets.
1) Combien ce polygone a-t-il de diagonales ?
2) En combien de points distincts des sommets se coupent-elles (au plus) ?

Exercice 16. ☺ *Nombre de surjections*
1) Déterminer le nombre de surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments sur un ensemble à n éléments.
2) On note dans la suite P_n^k le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k classes. Montrer que $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$ pour $2 \leq k \leq n-1$.
3) Calculer, en fonction de P_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.
4) Montrer que le nombre de surjections d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à p éléments est :

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\frac{p!}{i!(p-i)!}(p-i)^n.$$

Annie aime les séries génératrices

On se propose de résoudre un problème a priori très difficile de dénombrement. Et pourtant, son énoncé est désarmant de simplicité :

Exercice 17. ∞

Tous les dimanches, Annie (qui aime les sucettes à l'anis) quitte ses études pour aller acheter pour 1€de sucettes. Cette année, elle décide de payer chaque dimanche de façon différente des dimanches précédents à l'aide de pièces de 1€, 50c, 20c, 10c ou 5c. Elle arrêtera les sucettes quand elle aura épuisé toutes les combinaisons. Réussira-t-elle à passer l'année ?

La solution fait intervenir les séries génératrices. On prend pour base le centime :

$$\begin{aligned}
G_5(q) &= 1 + q^5 + q^{10} + q^{15} + ... \\
G_{10}(q) &= 1 + q^{10} + q^{20} + q^{30} + ... \\
G_{20}(q) &= 1 + q^{20} + q^{40} + q^{60} + ... \\
G_{50}(q) &= 1 + q^{50} + q^{100} + q^{150} + ... \\
G_{100}(q) &= 1 + q^{100} + q^{200} + q^{300} + ...
\end{aligned}$$

L'avantage de ces séries, c'est que l'on peut les multiplier comme des polynômes. Et si l'on calcule $G(q) = G_5(q) \times G_{10}(q) \times G_{20}(q) \times G_{50}(q) \times G_{100}(q)$, on se rend compte que le coefficient du terme q^{100} est exactement le nombre de façons qu'Annie a pour acheter ses sucettes :

$$\begin{aligned}
1 + q^5 + 2q^{10} + 2q^{15} + 4q^{20} + 4q^{25} + 6q^{30} + 6q^{35} + 9q^{40} + 9q^{45} + 13q^{50} + 13q^{55} + 18q^{60} + 18q^{65} + 24q^{70} + \\
24q^{75} + 31q^{80} + 31q^{85} + 39q^{90} + 38q^{95} + \boxed{50q^{100}} + ...
\end{aligned}$$

Il y a donc 50 façons de payer les sucettes. Raté de peu, Annie attendra les chocolats de Noël des deux derniers dimanches.
On remarque qu'il y a plus de façons de payer 90c que 95c.

Cette méthode des séries génératrices est très efficace, mais on peut se débrouiller sans. Pour le voir, nous allons traiter un cas particulier :

Exercice 18. ∞

De combien de façons différentes peut-on payer la somme de 100€ avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

On note x, y, z respectivement le nombre de pièces de 10, 20 et 50 nécessaires. Il faut résoudre l'équation $10x + 20y + 50z = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y + 5z = 100$ dans N^3. Trois variables, c'est beaucoup pour un seul homme, aussi, on pose $k = x + 2y$. Le nombre de solution de l'équation $x = k - 2y$ est :

$$\sum_{k=0}^{[\frac{k}{2}]} 1 = [\tfrac{k}{2}] + 1,$$

où $[\frac{k}{2}]$ est la partie entière de $\frac{k}{2}$.
Pour $0 \leq z \leq 200$ donné, le nombre de solutions de l'équation $x + 2y = 1000 - 5z$ est donc $[\frac{1000-5z}{2}] + 1$, d'où le nombre de solutions de l'équation cherchées :

$$\sum_{z=0}^{200} \left(\left[\frac{1000 - 5z}{2} \right] + 1 \right) = \sum_{z=0}^{200} \left(\left[\frac{-5z}{2} \right] + 501 \right) = \underbrace{201 \times 501}_{100\ 701} + \sum_{z=0}^{200} \left[\frac{-5z}{2} \right].$$

Il reste à calculer le dernier sigma :

$$\begin{aligned}\sum_{z=0}^{200}\left[\frac{-5z}{2}\right] &= \sum_{k=1}^{100}\left(\left[\frac{-5(2k-1)}{2}\right]+\left[\frac{-5(2k)}{2}\right]\right)\\ &= \sum_{k=1}^{100}\left(\left[-5k+\frac{5}{2}\right]-5k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{100}(-10k+2)\\ &= 200-10\frac{100\times 101}{2} = -50\ 300\end{aligned}$$

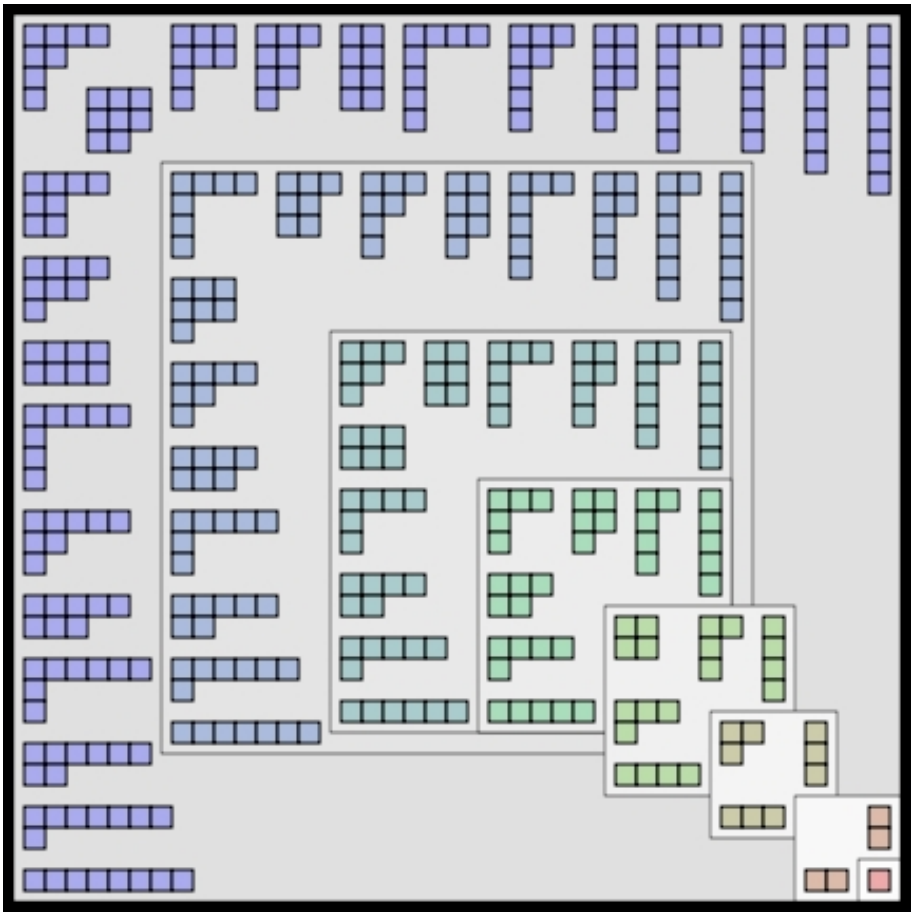
D'où le nombre de solutions : $100\ 701 - 50\ 300 = \boxed{50\ 401}$.

Addendum - Partition d'un entier

Pour dénombrer le nombre de **partition** d'un entier n (i.e. le nombre de façons d'écrire un entier en somme d'entiers naturels non nuls), on peut le faire à la main. Par exemple, pour 5 :

$$\begin{aligned}5 &= 5\\ &= 4+1\\ &= 3+2\\ &= 3+1+1\\ &= 2+2+1\\ &= 2+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+1.\end{aligned}$$

Une astuce pour ne pas en perdre dans le décompte est d'utiliser les diagramme de Ferrer :



Mais même avec ces diagrammes, on ne peut pas raisonnablement aller bien loin... En effet, $p(10) = 42$, $p(100) = 190569292$ et $p(1000) \simeq 24 \times 10^{32}$.
Une très jolie formule de Hardy et Ramanujan qui date de 1900 donne un valeur approchée pour les grandes valeurs de n

$$p(n) \simeq \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$