Probabilités

Leçon 3
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Notions de base complètes pour bien démarrer les probabilités...

Table des matières

I Généralités

Définition 3.1 *Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat est dû au hasard. L'ensemble des résultats possibles forme l'**univers** noté Ω (ou $\mathcal{U}$). Un sous-ensemble E de l'univers est un **évènement**.*
*- S'il ne contient qu'un seul élément, on dit que l'évènement est **élémentaire**.*
*- Si $E = \emptyset$ l'évènement est dit **impossible**.*
*- Si $E = \Omega$ l'évènement est dit **certain**.*

Définition 3.2 *Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω.*
- L'évènement "A ou B" s'écrit $A \cup B$.
- L'évènement "A et B" s'écrit $A \cap B$.
- L'évènement "non A" s'écrit $\overline{A}$.
- L'évènement "A et non B" s'écrit $A \backslash B$.
Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'évènements de Ω,

- *l'évènement **"au moins un des** A_i" s'écrit $\boxed{\cup_{i \in I} A_i}$*

et

- *l'évènement **"tous les** A_i" s'écrit $\boxed{\cap_{i \in I} A_i.}$*

Définition 3.3 *Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** lorsque les ensembles correspondants sont **disjoints** (i.e. $A \cap B = \emptyset$).*

Définition 3.4 *Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** (ou σ-algèbre) de parties de Ω tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :*

i. $\Omega \in \mathcal{T}$.

ii. *si* $A \in \mathcal{T}$ *alors* $\overline{A} \in \mathcal{T}$.

iii. *si* $(A_i)_{i \in I}$ *est une famille finie ou dénombrable de* $\mathcal{T}$, *alors* $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Exercice 1. ♪
Si $\mathcal{T}$ est une tribu, montrer que $\emptyset \in \mathcal{T}$ et que $\cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Remarque: L'ensemble $\mathcal{T}$ des évènements liés à un expérience aléatoire forme une tribu. Dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, on peut avoir par exemple $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 2. ♪
Déterminer toutes les tribus de l'ensemble $\Omega = \{a, b, c\}$.

Définition 3.5 *Avec les notations précédentes, le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est un **espace probabilisable**.*

Définition 3.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrable de $\mathcal{T}$ (i.e. $I \subset \mathbb{N}$). Cette famille forme un **système complet** d'évènements si les A_i sont incompatibles deux à deux et si $\cup_{i\in I} A_i = E$ (i.e. les A_i forment une partition de E).*

Remarque: Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a $\{A, \overline{A}\}$ qui est un système complet d'évènements de Ω. En particulier, $\{\emptyset, \overline{\Omega}\}$ en est un.

II Probabilités de base

Définition 3.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application*

$$\begin{aligned} p : \mathcal{T} &\longrightarrow [0;1] \\ A &\longmapsto p(A) \end{aligned}$$

*vérifiant $p(\Omega) = 1$ et $p\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \sum\limits_{i\in I} p(A_i)$ pour toute famille finie ou dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles (on dit que p est σ-additive). Alors $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ est un **espace probabilisé**.*

Remarque: La définition précédente est connu aussi sous le nom d'axiome de Kolmogorov. Les lois de probabilité s'inscrivent dans un cadre plus général de la théorie de la mesure dans laquelle on impose qu'elles soient des mesures positives de masse 1.

Proposition 3.8 *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé. On a :*

i. $\boxed{p(\emptyset) = 0.}$

ii. $\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A).}$

iii. $\boxed{p(A \backslash B) = p(A) - p(A \cap B).}$

*et d'une façon générale, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de A, on a la **formule du crible** ou **formule de Poincaré** :*

$$\boxed{p\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} p(A_i) - \sum_{i\neq j} p(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k \ distincts} p(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + (-1)^{n+1} p\left(\cap_{i\in I} A_i\right).}$$

Théorème 3.9 *Si Ω est fini et si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, il y a **équiprobabilité** et pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a*

$$\boxed{p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}.$$

Exercice 3. ♩

On jette trois fois un dé. On note a, b, c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que Q :

1) ait une racine double.
2) n'ait pas de racines réelles.
3) ait deux racines réelles distinctes.

Exercice 4. ♩ *Dérangements*

On place au hasard quatre objets b_1, b_2, b_3, b_4 dans quatre casiers C_1, C_2, C_3, C_4. Lorsque le numéro d'un objet est le même que celui du casier qui le contient, on dit qu'il y a rencontre.

1) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une rencontre ?
2) Combien faut-il de boîtes (et d'objets) pour que cette probabilité soit inférieure à $0,632$.

Exercice 5. ♪ *Dérangements, le retour.*

Lors d'un bal, n couples de danseurs se présentent. Sur la piste de danse, on décide de tirer au sort un danseur pour chaque danseuse. Quelle est la probabilité qu'aucun danseur ne se retrouve avec la danseuse avec laquelle il est venu ?

III Probabilités conditionnelles

Définition 3.10 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $p(B) \neq 0$. On a alors la* ***probabilité conditionnelle*** *:*

$$\boxed{p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.}$$

On note aussi parfois $p(A|B)$ et on lit "p de A sachant B".

Remarque: Une application basique de cette formule donne $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) = p(A_2) \times p_{A_2}(A_1)$

Proposition 3.11 ***Formule des probabilités composées*** *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'évènements telle que $p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \neq 0$. On a alors :*

$$\boxed{p\left(\cap_{i \in I} A_i\right) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) \times p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times ... \times p_{A_1 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n).}$$

Proposition 3.12 ***Formule des probabilités totales*** *Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'évènements tel que $\forall i \in I, \quad p(A_i) \neq 0$ alors, $\forall B \in \mathcal{A}$:*

$$\boxed{p(B) = \sum_{i \in I} p_{A_i}(B) \times p(A_i).}$$

Proposition 3.13 ***Formule de Bayes*** *Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'évènements tel que $\forall i \in I, \quad p(A_i) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $p(B) \neq 0$. Alors, $\forall j \in I$, on a :*

$$\boxed{p_B(A_j) = \frac{p(A_j \cap B)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B) \times p(A_j)}{\sum_{i \in I} p_{A_i}(B) p(A_i)}.}$$

Remarque: On voit que dans le cas d'un seul évènement B, la formule de Bayes[1] se résume à

1. Le théorème de Bayes a été publié à titre posthume en 1763 par crainte du sacrilège : En effet, Thomas Bayes était ecclésiastique et pensait que l'application de sa formule à la recherche des causes ultimes d'un évènement aurait pu conduire à probabiliser l'existence de Dieu...

$$p_B(A) = \frac{p_A(B) \times p(A)}{p(B)}.$$

Exercice 6. ♩

Dans une population donnée, un individu sur 10 est porteur d'un virus V. On dispose d'un test mais :
- un individu malade a 9 chances sur 10 d'être détecté.
- un individu non-malade a 5 chances sur 100 d'être déclaré positif.
Quels sont les risques d'erreur du test ?

IV Indépendance en probabilités

Définition 3.14 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé.Soient A et B dans $\mathcal{A}$. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si la sorite suivante est vérifiée :*

i. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

ii. $p_A(B) = p(B)$.

iii. $p_B(A) = p(A)$.

Exercice 7. ♪

Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Définition 3.15 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements de $\mathcal{A}$.*
- La famille $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'évènements ***deux à deux indépendants*** *si $\forall (i,j) \in I^2$, tel que $i \neq j$ on a $p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \times p(A_j)$.*
- La famille $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'évènements ***totalement indépendants*** *(ou globalement indépendants, ou mutuellement indépendants) si $\forall J \subset I$, $p(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{i\in J} p(A_j)$*

Remarque: Une famille d'évènements mutuellement indépendants est une famille d'évènements deux à deux indépendants. La réciproque est fausse.

Remarque: Il faut faire la différence entre évènements indépendants et évènements incompatibles. Ce dernier est ensembliste quand le premier dépend de la loi considérée.

Exercice 8. ♪

On jette deux dés (un rouge, un vert). On considère les évènements : S, "la somme des résultats est 7" ; Q, "le dé rouge donne 4", T, "le dé vert donne 3".

1) Les évènements S et Q sont-ils incompatibles ? indépendants ?

2) Idem avec S et T.

3) Les évènements S et $Q \cap T$ sont-ils indépendants ?

V Le coin du guerrier

Exercice 9. ♩ *(un classique)*

On se demande ici quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considère ici une année de 365 jours et les jours de naissance sont équiprobables - ce qui n'est pas vrai dans la réalité ![2])

1) Déterminer p_n.

2) Montrer que pour $n \geq 23$, on a $p_n \geq \frac{1}{2}$.

2. En effet, le jour de l'année qui compte en moyenne le plus grand nombre de naissances en France est le 23 septembre... ...soit 9 mois après la Saint Sylvestre !

3) Montrer que $p_n = 1 - \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{365}\right)$.
4) Montrer que si $x \in [0;1[$, on a $-\ln(1-x) \geqslant x$.
5) Déterminer le plus petit n tel que $p_n \geq 0,9$.

Exercice 10. ♩ *Le problème des chapeaux. (Une variante du problème des danseurs)*
Il s'agit d'un célèbre problème de probabilité : n personnes laissent leurs chapeaux à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait repris son propre chapeau ?
Nota Bene : Le même problème se pose avec n couples qui arrivent à un bal. Quelle est la probabilité que, lors d'une danse, personne ne danse avec la personne avec laquelle il est arrivé ?

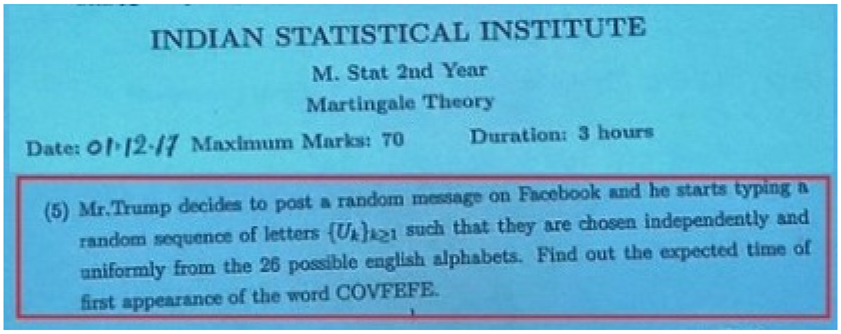
1) On considère les permutations σ d'un ensemble à n éléments (on peut les voir comme les bijections de $[\![1,n]\!]$). On appelle **dérangement** une telle permutation sans point fixe (i.e. il n'existe pas de $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) = i$). Le problème revient donc à dénombrer le nombre N de dérangement sur n éléments. Trouver N.
2) En déduire que la probabilité que chacun parte avec un chapeau différent du sien est $p_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, et déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
3) Dans cette question, on s'intéresse à la rapidité de la convergence de cette suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $|p_n - e^{-1}| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 11. 𝅗𝅥 *Sale cul ! (Acrostiche de Corneille)*
Quand on lit Horace de Corneille on trouve l'acrostiche suivant :

*"**S**'attacher au combat contre un autre soi-même,*
***A**ttaquer un parti qui prend pour défenseur*
***L**e frère d'une femme et l'amant d'une sœur*
***E**t, rompant tous ces nœuds, s'armer pour la patrie*
***C**ontre un sang qu'on voudrait racheter de sa vie,*
***U**ne telle vertu n'appartenait qu'à nous*
***L**'éclat de grand nom lui fait peu de jaloux."*

Etonnant quand on sait que le tragédien est considéré par certains professionnels comme un personnage trop triste pour avoir écrit les pièces de Molière !
On se propose de déterminer la probabilité que l'acrostiche soit apparu par hasard dans la pièce qui contient 1782 vers.
On note X_i la variable aléatoire donnant la lettre commençant le i^e vers.
1) Quelle est la loi suivie par X_i ?
2) On note A_i l'évènement "l'acrostiche $x_1x_1\dots x_p$ commence au i^e vers". Calculer $p(A_i)$ en fonction de p.
3) Traduire le fait A que l'acrostiche est dans la pièce.
4) Montrer que, dans notre cas, $p(A_i \cap A_j) = 0$ si $|i-j| \leq 6$.
5) On note p_k la probabilité que l'acrostiche soit dans les $k+p-1$ premiers vers. Montrer que $p_k = kq$ en notant $p(A_1) = q$.
6) Vérifier que si $i - j \geq p$ alors A_i et A_j sont indépendants.
7) Montrer que $p_{k+1} = p_k + q - p_{k-p+1}q$.
8) En programmant sur la calculatrice, déterminer une valeur approchée de p_{1782}.

Remarque: Une variante plus actuelle et plus élémentaire :



INDIAN STATISTICAL INSTITUTE

M. Stat 2nd Year

Martingale Theory

Date: 01-12-17 Maximum Marks: 70 Duration: 3 hours

(5) Mr.Trump decides to post a random message on Facebook and he starts typing a random sequence of letters $\{U_k\}_{k\geq 1}$ such that they are chosen independently and uniformly from the 26 possible english alphabets. Find out the expected time of first appearance of the word COVFEFE.