C04-Quiz

Exercice 1. 𝅘𝅥𝅯 Dans l'énoncé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, que veulent dire ces lettres ?

Exercice 2. 𝅘𝅥𝅯 Définir la variable aléatoire undicatrice d'un évènement $A \in \mathcal{T}$.

Exercice 3. 𝅘𝅥𝅯 Rappeler la formule de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète finie.

Exercice 4. 𝅘𝅥𝅯 Rappeler la formule de la variance et de l'écart type d'une variable aléatoire réelle discrète finie.

Exercice 5. ♬ Rappeler la formule du moment d'ordre r d'une variable aléatoire réelle discrète finie.

Exercice 6. ♪ Rappeler la formule de König-Huygens.

Exercice 7. ♬ Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Exercice 8. ♪ Quelles sont les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire X ?

Exercice 9. ♪ Quelle est la formule de la covariance de deux variables X et Y ?

Exercice 10. ♪ Quelle est la formule du coefficient de corrélation linéaire de deux variables X et Y ?

Exercice 11. ♪ Enoncer le théorème de transfert.

Exercice 12. ♪ Quelles sont les formules d'un changement de variable affine $Y = aX + b$ sur l'espérance, la variance et l'écart type ?

Exercice 13. ♪ Rappeler la formule de la fonction génératrice de X.

Exercice 14. ♬ Caractéristiques, espérance et variance de la loi uniforme $\mathscr{U}(n)$?

Exercice 15. ♪ Caractéristiques, espérance et variance de la loi de Bernoulli (qui n'est pas une nouille !) $\mathscr{B}(p)$?

Exercice 16. ♪ Caractéristiques, espérance et variance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$?

Exercice 17. ♩ Rappeler la formule du multinôme.

Exercice 18. ♪ Rappeler la formule de Vandermonde.

Exercice 19. ♪ Caractéristiques (sans oublier $X(\Omega)$), espérance et variance de la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N, n, p)$.

Exercice 20. ♪ Qu'est-ce que le coefficient d'exhaustivité ?

Réponses

Exercice 1 : Ω est l'univers ensemble de définition de l'expérience probabiliste.
$\mathcal{T}$ est la tribu, i.e. l'ensembles des évènements considérés qui sont des sous-ensembles de l'univers.
p est la loi de probabilité définie sur la tribu.
Exercice 2 : On note X_A la variable indicatrice de A qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.
Exercice 3 : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$.
Exercice 4 : On appelle **variance** de X le réel

$$\boxed{V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 \, p_i}$$

On appelle **écart type** de X le réel

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exercice 5 :

$$\mu_r(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^r p(X = x_i) = E[(X - E(X))^r].$$

Exercice 6 :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Exercice 7 : On appelle **fonction de répartition** de X l'application

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & p(X \leq x) \end{array}$$

Exercice 8 : Elle doit satisfaire :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
- $F(x) = \sum\limits_{x_i \leq x} p_i$
- $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

Exercice 9 : On appelle **covariance** de X et Y le réel

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y)}$$

Exercice 10 :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Exercice 11 : Soit X une variable aléatoire et ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$E(\phi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) p(X = x_i).$$

Exercice 12 : $E(aX+b) = aE(X)+b$, $\quad V(aX+b) = a^2V(X)$ $\quad$ et $\quad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.
Exercice 13 : Soit X une variable aléatoire discrète (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). On définit le **fonction génératrice** G_X par :

$$\boxed{G_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^X p(X=k)}$$

Exercice 14 : On a $X(\Omega) = \{1, ...n\}$ et $p(X=k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. D'où :

$$E(X) = \tfrac{n+1}{2} \qquad V(X) = \tfrac{n^2-1}{12}$$

Exercice 15 : L'expérience aléatoire n'a que deux issues possibles appelées succès (avec une probabilité p) et échec (avec une probabilité $q = 1-p$).
On a alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$E(X) = p \qquad V(X) = pq$$

Exercice 16 : On réalise n épreuves aléatoires **identiques et indépendantes** de Bernoulli. On a alors un arbre de probabilité de valence 2 (i.e. deux branches de plus à chaque ramification). En appelant X la variable aléatoire qui recense le nombre de succès, on a $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ et on a alors $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ et

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq$$

Exercice 17 :

$$(a_1 + \cdots + a_k)^n = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_k!} a_1^{\alpha_1} \ldots a_k^{\alpha_k}$$

Exercice 18 : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k} = \binom{N}{n}$

Exercice 19 : Dans une urne contenant N boules dont N_1 blanches et N_2 noires, on tire au hasard $n \leq N$ boules, sans remise. On appelle $p = \frac{N_1}{N}$ la proportion de boules blanches dans l'urne.
On a $X(\Omega) = [\![\max\{0, n - N_2\}, \min\{n, N_1\}]\!]$.
De plus, $p(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ et

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Exercice 20 : Dans la loi hypergéométrique, il s'agit de $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$. (C'est ce qui fait que la variance n'est pas la variance d'une loi binomiale).