C05-Quiz

Exercice 1. ♪ Caractéristiques, espérance et variance de la loi géométrique sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2. ♪ Caractéristiques, espérance et variance de la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3. ♪ Caractéristiques, espérance et variance de la loi de Poisson.

Exercice 4. ♪ Caractéristiques, espérance et variance de la loi de Pascal.

Exercice 5. ♩ Dans le cadre d'une loi de Pascal, rappeler comment faire pour montrer que l'espérance de Z est $\frac{r}{p}$ en utilisant des loi géométriques.

Réponses

Exercice 1 : On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien
$\boxed{p(X = k) = q^k p}$.
On dit alors que X suit **la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre** p, notée $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$.

$$E(X) = \frac{q}{p}$$
$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Exercice 2 : On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \geq 1$,
$p(Y = k) = q^{k-1}p$.
On remarque que $Y = X + 1$ où X suit $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$. D'où
$E(Y) = E(X) + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p}$ et $V(Y) = V(X) = \frac{q}{p^2}$.
Exercice 3 : Une variable aléatoire réelle X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ ($\lambda > 0$), notée $\mathscr{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

$$E(X) = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$

Exercice 4 : On considère la réalisation d'essais indépendants d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Soit Z la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le nombre d'essais jusqu'au r^e succès. Ainsi, Z est le temps d'attente d'un r^e succès.

$$E(Z) = \frac{r}{p}$$
$$V(Z) = \frac{rq}{p^2}$$

Exercice 5 : On note Z_i la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir i succès. Toute l'astuce réside dans le **super-caprice** suivant :

$$Z = (Z_r - Z_{r-1}) + (Z_{r-1} - Z_{r-2}) + ... + (Z_2 - Z_1) + Z_1$$

On a $Z_i - Z_{i-1}$ suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Ainsi, Z devient la somme de r variables aléatoires géométriques sur $\mathbb{N}^*$, indépendantes, de même paramètre p. D'où, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = r \times \frac{1}{p}$.