Séries

Leçon 5

EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les Séries numériques. En bref et quasiment sans démonstration.

Table des matières

I Séries numériques

Définition 5.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La* ***série de terme général*** *u_n est la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.*
La somme S_n est alors la ***somme partielle*** *de la série.*

Définition 5.2 *Une série de terme général u_n est dite* ***convergente*** *si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas, on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Exemple:

$$\varphi \simeq 1,61803398874989484820...$$

On peut donc créer une série dont les termes seraient $u_0 = 1/10^0$, $u_1 = 6/10^1$, $u_7 = 9/10^7$... On aurait alors comme sommes partielles : $S_0 = 1$, $S_1 = 1,6$, $S_5 = 1,61803$ et la limite de (S_n) est φ.

Remarque: Par abus de langage, on parle de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ même si elle ne converge pas.

Exemple: (Les séries géométriques) On pose $u_n = u_0 r^n$ avec $r \neq 1$ et $u_0 \neq 0$. On a alors $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ et

$$(S_n) \text{ converge si et seulement si } |r| < 1 \text{ et alors } \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{u_0}{1-r}$$
$$(S_n) \text{ diverge si et seulement si } |r| \geq 1.$$

Remarque: A noter que la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes. En effet, on peut découper la somme en deux morceaux, la partie difficilement contrôlable (mais finie) au début et la partie dont on cherche la convergence ensuite. comme par exemple dans l'exemple suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor 1 + \frac{100}{n} \right\rfloor 2^k.$$

On voit que pour $n > 100$, on a $\left\lfloor 1 + \dfrac{100}{n} \right\rfloor = 1$, donc la série converge car

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor 1 + \frac{100}{n} \right\rfloor 2^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{100} \left\lfloor 1 + \frac{100}{n} \right\rfloor 2^k}_{\text{somme finie}} + \underbrace{\sum_{k=101}^{+\infty} 2^k}_{\text{somme divergente}} .$$

De fait, que la somme commence à 0, 1 ou 427 n'influence pas la convergence... La limite, en revanche, est impactée.

Définition 5.3 *La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est* ***absolument convergente*** *si et seulement si la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est convergente.*

II Propriétés

II.1 Condition nécessaire de convergence

Théorème 5.4 *Condition nécessaire de convergence*
Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Démonstration: On considère la suite des sommes partielles (S_n) qui tend vers l. On a alors la suite de terme général $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ qui converge vers $l - l = 0$.

□

Remarque: On utilise souvent la contraposée de cette propriété : Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ diverge.

Attention ! La réciproque du théorème est fausse. Par exemple, la **série harmonique**[1] $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, alors que $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ converge vers 0.

1. Le terme de série harmonique vient du fait que la gamme pythagoricienne sur laquelle est basée notre système musical

II.2 Où l'on recycle de vieux concepts

Un premier théorème qui ne choquera personne est basé sur la comparaison bien connue au niveau des suites :

Théorème 5.5 *(Comparaison)*
Supposons que pour tout $n \geq n_0$, on a $0 \leq u_n \leq v_n$.

$$\underline{\textit{Si}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \textit{ converge, } \underline{\textit{alors}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \textit{ converge.}$$
$$\underline{\textit{Si}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \textit{ diverge, } \underline{\textit{alors}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \textit{ diverge.}$$

Un autre théorème utilise nos connaissances sur les suites géométriques :

Théorème 5.6 *La série de terme général $u_n = a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.*

Exemple: Ainsi, si l'on veut étudier la convergence de la suite du début qui était construite sur les décimales de φ, on a

$$\varphi \simeq 1,61803398874989484820...$$

On avait les termes généraux $u_0 = 1/10^0$, $u_1 = 6/10^1$, $u_7 = 9/10^7$... Et donc $0 \leq u_k \leq \dfrac{9}{10^k}$. Puis par comparaison avec la série géométrique $9 \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k}$, on est bien assuré de la convergence.

Exercice 1. ♪

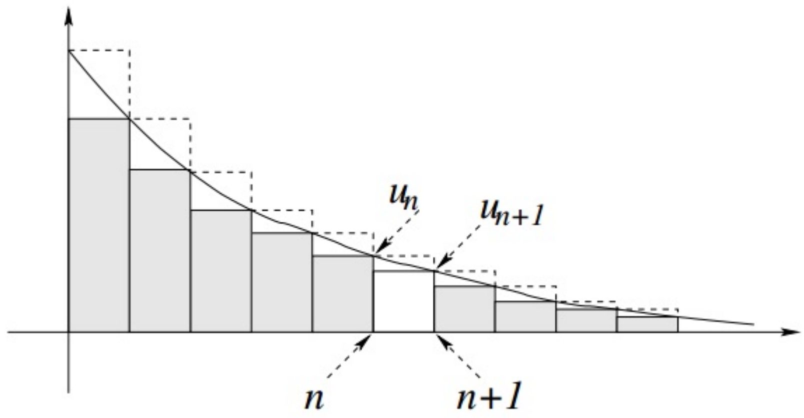
(Vrai-Faux) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n un réel strictement positif.

1) Si la suite (u_n) tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.
2) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum u_n^2$ diverge.
3) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite (u_n) ne tend pas vers 0.
4) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n^2) tend vers 0.
5) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

II.3 Lien avec les intégrales

Si l'on a une suite (u_n) définie par une fonction f décroissante et positive, on a le dessin suivant qui invite à voir différemment les séries :

utilise les rapports d'entiers : la quinte est dans un rapport $\frac{3}{2}$ avec la fondamentale et la tierce majeure est dans un rapport $\frac{5}{4}$ par exemple. En jouant un accord parfait de La (La-Do# -Mi), on entend des sons de fréquences 110, 220, 330, 440 (le La), 550 Hz...Les longueurs d'ondes sont donc, à constante près, des inverses d'entiers.



En effet, la valeur de la série est intimement liée à l'aire hypographe, donc à l'intégrale de la fonction.
On a le théorème suivant majeur pour la suite :

Théorème 5.7 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, décroissante. La série de terme général $u_n = f(n)$ et de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.*

Démonstration: Comme f est décroissante, on a $u_n \geq f(x) \geq u_{n+1}$ pour tout $x \in [n, n+1]$.
Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \geq \int_0^{n+1} f(t)dt \geq \sum_{k=1}^{n+1} u_k.$$

Donc si la série converge, alors l'intégrale généralisée aussi et réciproquement en retournant la double inégalité (i.e. $u_0 + \int_0^{n+1} f(t)dt \geq \sum_{k=0}^{n} u_k \geq \int_0^{n+1} f(t)dt$).

□

Une conséquence de ce théorème est l'application que l'on peut en faire pour les séries de Riemann et de Bertrand

Théorème 5.8 *(Séries de Riemann) La série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Exemple: On peut montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^3}$ converge.
En effet, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n} = 0$, donc il existe un rang n_0 à partir duquel $0 < \frac{(\ln(n))^\alpha}{n} \leq 1$.
Et donc, à partir de n_0, on a $0 < \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^3} \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, d'où la convergence.

Théorème 5.9 *(Séries de Bertrand) La série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.*

On remarque que dans le cas général où $u_n = \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$, il suffit de ne considérer que la puissance de n en négligeant le $\ln(n)$.

II.4 Critères de convergence

Il existe trois critères de base, chacun ayant son champ d'application

Les deux premiers sont basés sur une comparaison de la série étudiée avec une série géométrique. En effet, si l'on veut savoir quand $\sum r^n$ converge, il suffit de comparer r à 1. Dans le cas où on a $\sum u_n$, cela revient à regarder $\sqrt[n]{u_n}$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient alors

Théorème 5.10 *(Critère de Cauchy)*
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

$$\textit{La série de terme général } u_n \begin{cases} \textit{converge si } l<1 \\ \textit{diverge si } l>1 \end{cases}$$

On ne peut pas conclure si $l = 1$.

Démonstration: Si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $l<1$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $\sqrt[n]{u_n} < r < 1$ et donc $u_n < r^n$. D'où le résultat de convergence grâce à la série géométrique convergente.

La même idée permet de conclure si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $l>1$.

□

Théorème 5.11 *(Critère de d'Alembert)*
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

$$\textit{La série de terme général } u_n \begin{cases} \textit{converge si } l<1 \\ \textit{diverge si } l>1 \end{cases}$$

On ne peut pas conclure si $l = 1$.

Démonstration: On utilise la même idée que dans la preuve précédente avec le ressort :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r \ \rightarrow \ u_n < u_{n_0} r^{-n_0} r^n.$$

□

Exemples:

- La série $\sum \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}$ converge car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$.
- En revanche, la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ diverge car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \longrightarrow 4 > 1$.

Remarque: On remarque que le critère de Cauchy (pas plus que le critère de Bertrand) ne s'applique ni aux séries de Riemann, ni à celles de Bertrand :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{-\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{-\alpha}(\ln(n))^{-\beta}} = 1$$

Remarque: A noter aussi que le critère de d'Alembert est plus facile à appliquer, mais qu'il échoue plus souvent (en effet, il faut que le terme général soit toujours non nul, ce qui n'est pas le cas des développement décimaux comme pour φ).

Théorème 5.12 *(Critère de Riemann)*
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l$.

Si $l=0$, *la série de terme général* u_n *converge si* $\alpha>1$.

$$\textit{Si } l=+\infty, \textit{ la série diverge si } \alpha\le 1. \textit{ Si } l\neq 0, \textit{ la série } \begin{cases} \textit{converge si } \alpha>1 \\ \textit{diverge si } \alpha\le 1 \end{cases}$$

II.5 D'autres théorèmes de convergence

Tout d'abord, une proposition qui paraît très élémentaire mais dont la preuve utilise la condition de Cauchy qui est hors programme :

Théorème 5.13 *Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Démonstration: Exercice.
D'autre part, voila un théorème qui justifie un peu plus l'utilité de la notion d'équivalents :

Théorème 5.14 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs, équivalentes au voisinage de $+\infty$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Démonstration: Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad (1-\varepsilon)v_n < u_n < (1+\varepsilon)v_n$.
En fixant $\varepsilon < 1$, par comparaison, on sait que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum(1-\varepsilon)v_n$ et donc $\sum v_n$ convergent. Mutatis mutandis, l'autre partie de l'inégalité donne la divergence de $\sum v_n$ si $\sum u_n$ diverge.

$\square$

II.6 Les séries alternées

On considère ici les séries dont le terme général change de signe à chaque rang. Autrement dit :

Définition 5.15 *La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est **alternée** si $u_n \times u_{n+1} < 0$ pour tout n.*

Il n'y a qu'un seul théorème de convergence des séries alternées au programme de Cachan :

Théorème 5.16 *(Critère spécial des séries alternées) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série alternée.*
Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit vers 0, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

III Attention !

Il faut faire attention à tout ce que l'on peut lire ou voir sur le net (surtout avec des gens en mal de sensation qui ne comprennent pas grand chose au sujet). Voici quelques exemples qui ne résistent pas longtemps à la théorie :

III.1 Couillonnade 1 : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$

- Si l'on pose $S = 1-1+1-1+1-1+\dots$, on a trivialement $S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = \boxed{0}$.
- Sauf que si l'on écrit $S = 1-[1-1+1-1+1-1+\dots] = 1-S$. Donc $2S = 1 \quad \Leftrightarrow \quad S = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

Dans la première version, on utilise un regroupement de termes, ce qui est interdit par la théorie quand il n'y a pas convergence. En fait, on peut regrouper par paquets quand la série de base converge ou que la série est à termes positifs. Certainement pas si elle est alternée divergente ! !

Pour la seconde version, l'arnaque est plus subtile. Il ne s'agit pas à proprement parlé d'un regroupement. Le problème vient du fait que S n'a pas de sens. En effet, que vaut S ? En soit, il s'agit de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k$ ... qui n'existe pas !

En effet, la somme partielle vaut soit 0, soit 1 suivant si l'on s'arrête à un rang impair ou pair. Il n'est donc pas faux d'écrire que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k$$

mais cela ne mène à rien car la limite n'a pas de sens.

III.2 Couillonnade 2 : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^k$

Encore une fois, on pose $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$.

On a alors $2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1$. Donc $S = \boxed{-1}$.

On sent bien que ce n'est pas possible.

Ici, l'arnaque est facile à déceler : elle tient juste au fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = +\infty$. Il n'y a donc rien de mal à écrire que $2\times(+\infty) = (+\infty) - 1$. En revanche, retrancher les infinis, non ! Il ne faut pas charrier !

III.3 Couillonnade 3 : Si Euler le dit, ça doit être vrai ! !

Dans un article de 1755 : "*De seriebus divergentibus*", L. Euler écrit qu'une série est dite convergente si ses termes forment une suite décroissante vers 0.... ! ! !

Ah ben non ! Ca ne va pas du tout avec ce qui précède ! En fait, il cherchait juste une définition et s'en est une comme une autre. Mais jamais il ne dit que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ n'est pas infinie. C'est simplement que "convergente" ne veut pas dire la même chose pour lui.

En plus, il affirme que

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots &= \frac{1}{2} \\ 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots &= -1 \\ 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

comme nous l'avons déjà vu.

Mais le nom même de l'auteur impose le respect.

Il préfère sa définition de convergence dernière car elle est consistante avec la série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x},$$

pour $x = -1$.

Liebniz est d'ailleurs d'accord avec cette idée en ajoutant un argument probabiliste : "Si on calcule, au hasard, une somme partielle, on a autant de chance de tomber sur 0 que sur 1. L'espérance est donc de $\frac{1}{2}$".

Mais Euler va plus loin : Il utilise l'*opérateur aux différences* Δ^1 qui transforme une suite (a_n) en la suites des différences successives $(a_{n+1} - a_n)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Si la suite (a_n) est à termes strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0, alors la série $s = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$ est alternée et

$$2s = a_0 + (a_0 - 1) - (a_1 - a_2) + \cdots = a_0 - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \Delta^1 a_k.$$

On remarque que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\Delta^1 a_k$ est encore une série alternée et on peut lui appliquer le même procédé pour arriver à une troisième série alternée en faisant intervenir les différences secondes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Et en itérant le procédé, Euler parvient à

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\Delta^k a_0$$

avec $\Delta^n = \Delta^{n-1}a_0 - \Delta^{n-1}a_1 = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{k}{n}a_k$.

Voici un exercice qui permet de démontrer proprement les résultats inhérent à cette nouvelle technique :

Exercice 2.

On appelle **transformation binomiale** l'application qui à toute suite de réels (a_n) associe la suite (b_n)définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{k}{n}a_k.$$

1) Montrer que la transformation est involutive : i.e. $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{k}{n}b_k$.

2) Supposons que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge. Démontrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. On note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sa somme.

3) Pour $z \neq 1$, on pose $g(z) = \dfrac{1}{1-z}f\left(\dfrac{-z}{1-z}\right)$.

Montrer que $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

4) Déduisez de ce qui précède que $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}f(-1) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$.

La transformation d'Euler remplace une série à convergence lente (si le reste est d'ordre n^{-1}) en une série à convergence rapide (reste à décroissance géométrique). Par exemple, si l'on prend $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Il est un exercice classique de démontrer que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

La série transformée devient $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 2^2} + \dfrac{1}{3\times 2^3} + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(k+1)2^{k+1}} = \ln 2$, qui converge bien plus vite.

Comme cela fonctionne pour les séries convergentes, Euler essaie sur les séries divergentes. La série $\sum(-1)^n$ est transformée en $\dfrac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \cdots = \dfrac{1}{2}$. Ca c'est du rapide !!

IV Séries entières

Définition 5.17 *On appelle **série entière** la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *qui dépend de* x.

Remarque: Contrairement aux séries numériques classiques, il s'agit en fait de fonction de la variable x.
Une conséquence des théorèmes de comparaison et d'absolue convergence donne la proposition suivante :

Proposition 5.18 *Soit* $x_0 \neq 0$. *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_o^n$ *converge, alors pour tout* $|x| < |x_0|$, *on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *qui converge.*

Définition 5.19 *On appelle* R *le **rayon de convergence** de la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *le réel tel que :*

$$\underline{Si}\ |x| < R,\ \underline{alors} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge et}$$

$$\underline{Si}\ |x| > R,\ \underline{alors} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ diverge.}$$

L'intervalle $]-R, R[$ *est appelé **intervalle de convergence** de la série.*
On peut parfois admettre la notation $R = +\infty$.

Proposition 5.20 *Si* $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$ *ou si* $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$, *alors* $\boxed{R = \frac{1}{l}}$.

Théorème 5.21 *Une série entière est une fonction continue, indéfiniment dérivable sur son intervalle de convergence.*
Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *ont le même rayon de convergence et pour tout* $x \in]-R, R[$, *on a*

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Définition 5.22 *Une fonction* f *est dite **décomposable en série entière** dans* $]-R, R[$ *s'il existe une série absolument convergente dont la somme est égale à* $f(x)$ *pour tout* $x \in]-R, R[$.

Exemple: On peut utiliser tous les développements limités pour peu qu'on fasse tendre l'ordre vers l'infini.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad R = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R = +\infty$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \ldots \qquad R = 1.$$

Ces formules sont fondamentales : On regarde la série dans les yeux et on lui dit : "On se serait pas déjà rencontré ?". Tant pis pour ceux qui ne sont pas physionomistes.