C06-Quiz

Exercice 1. ♪ Rappeler la définition d'une série numérique et des sommes partielles.

Exercice 2. ♪ Donner la définition d'une série absolument convergente.

Exercice 3. ♪ Donner le critère de divergence (grossière) d'une série numrique.

Exercice 4. ♪ Que dire de la propriété : si (u_n) tend vers 0, alors la série de terme général u_n converge.

Exercice 5. ♪ Rappeler le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 6. Si f est une fonction décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Rappeler le lien entre la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 7. ♪ Rappeler la définition et la condition de convergence des séries de Riemann.

Exercice 8. ♪ Rappeler la définition et la condition de convergence des séries de Bertrand.

Exercice 9. ♪ Rappeler le critère de Cauchy.

Exercice 10. ♪ Rappeler le critère de d'Alembert.

Exercice 11. ♪ Rappeler le critère de Riemann.

Exercice 12. ♬ Rappeler la définition d'une séie alternée.

Exercice 13. ♪ Quel est le critère de convergence des séries alternées ?

Exercice 14. ♬ Si $u_n \sim v_n$, que peut-on dire des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Exercice 15. ♪ Qu'est-ce qu'une série entière ?

Exercice 16. ♬ Qu'est-ce que le rayon de convergence d'une série entière ?

Exercice 17. ♪ Qu'est-ce qu'une fonction décomposable en série entière ?

Réponses

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La **série de terme général** u_n est la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
La somme S_n est alors la **somme partielle** de la série.
Exercice 2 : La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est **absolument convergente** si et seulement si la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est convergente.
Exercice 3 : On sait
Condition nécessaire de convergence
Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Ainsi, si (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série de terme général u_n diverge (grossièrement).

Exercice 4 : C'est débile. Demander son avis à la série harmonique !

Exercice 5 : Supposons que pour tout $n \geq n_0$, on a $0 \leq u_n \leq v_n$.

$$\underline{\text{Si}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \text{ converge, } \underline{\text{alors}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge.}$$
$$\underline{\text{Si}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ diverge, } \underline{\text{alors}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \text{ diverge.}$$

Exercice 6 : La série et l'intégrale ont même nature.

Exercice 7 : Une série de Riemann est de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Elle est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 8 : Une série de Bertrand est de la forme $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$. Elle converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 9 : Critère de Cauchy

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

$$\text{La série de terme général } u_n \begin{cases} \text{converge si } l < 1 \\ \text{diverge si } l > 1 \end{cases}$$

On ne peut pas conclure si $l = 1$.
Exercice 10 : On suppose que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

$$\text{La série de terme général } u_n \begin{cases} \text{converge si } l < 1 \\ \text{diverge si } l > 1 \end{cases}$$

On ne peut pas conclure si $l = 1$.
Exercice 11 : On suppose que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = l$.

Si $l = 0$, la série de terme général u_n converge si $\alpha > 1$.
Si $l = +\infty$, la série diverge si $\alpha \leq 1$. Si $l \neq 0$, la série

$$\begin{cases} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 12 : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est **alternée** si $u_n \times u_{n+1} < 0$ pour tout n.

Exercice 13 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série alternée.

<u>Si</u> la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit vers 0, <u>alors</u> $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Exercice 14 : Elles ont même nature.

Exercice 15 : On appelle **série entière** la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ qui dépend de x.

Exercice 16 : On appelle R le **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ le réel tel que :

$$\underline{\text{Si}}\ |x| < R,\ \underline{\text{alors}}\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge et}$$

$$\underline{\text{Si}}\ |x| > R,\ \underline{\text{alors}}\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ diverge.}$$

L'intervalle $]-R, R[$ est appelé **intervalle de convergence** de la série.
On peut parfois admettre la notation $R = +\infty$.
Exercice 17 : Une fonction f est dite **décomposable en série entière** dans $]-R, R[$ s'il existe une série absolument convergente dont la somme est égale à $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.