V.A.R. discrètes

Leçon 6
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Contrairement aux chapitres précédents, l'univers n'est pas fini ici. Il reste dénombrable et infini, donc en bijection avec $\mathbb{N}$.

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable.

I La loi géométrique sur $\mathbb{N}$: $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$

On considère la réalisation d'essais **indépendants**, d'une même épreuve à deux issues (succès avec une probabilité p et échec avec une probabilité $q = 1 - p$). Soit X la variable aléatoire réelle qui prend pour valeurs le nombre d'échecs avant le premier succès.
On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien $\boxed{p(X = k) = q^k p}$.
On dit alors que X suit **la loi géométrique sur** $\mathbb{N}$ **de paramètre** p, notée $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$.

Remarque: • Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k p = p \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{p}{1-q} = 1$.

• Un bon modèle pour la loi géométrique est de considérer le nombre de filles obtenues à la naissance avant d'obtenir un garçon (comme dans nos anciennes sociétés). Il s'agit bien d'une loi géométrique car, si ça se trouve, un couple peut n'avoir jamais de garçon !!...

Proposition 6.1 *Si X suit $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$, on a*

$$E(X) = \frac{q}{p}$$
$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration: Dans toute cette preuve, toutes les séries existent car les $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge quand $0 < q < 1$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k p = qp \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = qp \left[\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \right]_{t=q} = \frac{qp}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

et pour la variance on utilise la formule de König-Huygens

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k p \quad \text{et en posant } k^2 = k(k-1)+k \\
&= qp \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} \\
&= q^2 p \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} + qp \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} \\
&= q^2 p \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \right) \right]_{t=q} + qp \times \frac{1}{p^2} \\
&= q^2 p \times \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{qp}{p^2} = \frac{q(1+q)}{p^2}
\end{aligned}$$

d'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{q}{p^2}$

□

Exercice 1. ♪
Dans le cas d'un couple désirant à tout prix un garçon, quelle est la moyenne du nombre de filles avant d'avoir un garçon ?

II Loi géométrique sur $\mathbb{N}*$: $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$

Dans ce paragraphe, afin de suivre les notations en cours en probabilité, on pose dans la suite comme notation (abusive) $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
On considère la réalisation d'essais indépendants d'une même épreuve à deux issues comme précédemment. Soit Y la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le nombre d'épreuves jusqu'au premier succès. On a alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \geq 1$, $p(Y = k) = q^{k-1}p$.
On remarque que $Y = X + 1$ où X suit $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$. D'où $E(Y) = E(X) + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p}$ et $V(Y) = V(X) = \frac{q}{p^2}$

Proposition 6.2 *Si Y suit $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$, on a*

$$E(Y) = \frac{1}{p}$$
$$V(Y) = \frac{q}{p^2}$$

Exercice 2. ♪
Montrer que dans le cas où X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, on a $E(X) = p \times 1 + (1-p)(E(X)+1)$ par un argument simple. Retrouver alors le résultat sur l'espérance.

III Loi de Poisson : $\mathscr{P}(\lambda)$

Définition 6.3 *Une variable aléatoire réelle X suit une* ***loi de Poisson*** *de paramètre λ ($\lambda > 0$), notée $\mathscr{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.*

Remarque: Vérifions qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \geq 0$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$.

Proposition 6.4 *Si X suit $\mathscr{P}(\lambda)$, on a*

$$E(X) = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$

Démonstration: Là encore, au lieu d'écrire les sommes partielles et de faire tendre N vers $+\infty$, on écrit directement les somme infinies.

$$\sum_{k=0}^{N} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\lambda^k}{(k)!}}_{\text{série cv vers } e^{\lambda}}.$$

Donc $E(X)$ converge vers λ.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(k+1)\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2\underbrace{\sum_{k=0}^{N-2}\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{série cv}} + e^{-\lambda}\lambda\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{série cv}}
\end{aligned}$$

D'où $E(X^2) = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

□

Remarque: La loi de Poisson est la loi des évènements rares.

Exercice 3. ♩ *Un grand classique !*

Dans un grand magasin, le nombre de clients présents un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre a. D'autre part, chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille et on suppose les différentes tentatives de vol indépendantes.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients fréquentant le magasin un jour donné et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui se font voler leur portefeuille ce même jour.

1) Soit m un entier naturel, rappeler $p(X = m)$, ainsi que $E(X)$ et $V(X)$.

2) Déterminer pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $p_{(X=n)}(Y = k)$.

3) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

4) On note Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui ne se font pas voler leur portefeuille. Quelle est la loi de Z ?

5) Montrer que Y et Z sont indépendantes.

Exercice 4. ♩ *Additivité des lois de Poisson*

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_1)$ et $\mathscr{P}(\lambda_2)$. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

IV Loi de Pascal : $\mathcal{P}(r, p)$ (et loi binomiale négative)

On considère la réalisation d'essais indépendants d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Soit Z la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le nombre d'essais jusqu'au r^e succès. Ainsi, Z est le temps d'attente d'un r^e succès.

Remarque: $\mathcal{P}(1,p) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}*}(p)$
On a $Z(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$ et pour tout $k \geq r$, $p(Z=k) = \binom{k-1}{r-1} q^{k-r} p^{r-1} p = \binom{k-1}{r-1} q^{k-r} p^r$.

Proposition 6.5 *Si Z suit $\mathcal{P}(r,p)$, on a*

$$E(Z) = \frac{r}{p}$$
$$V(Z) = \frac{rq}{p^2}$$

Démonstration: On note Z_i la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir i succès. Toute l'astuce réside dans le **super-caprice** suivant :

$$Z = (Z_r - Z_{r-1}) + (Z_{r-1} - Z_{r-2}) + \ldots + (Z_2 - Z_1) + Z_1$$

On a $Z_i - Z_{i-1}$ suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Ainsi, Z devient la somme de r variables aléatoires géométriques sur $\mathbb{N}^*$, indépendantes, de même paramètre p. D'où, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = r \times \frac{1}{p}$

□

Remarque: Si l'on considère, dans la même situation de succès/échecs indépendants jusqu'à r réalisations, on peut compter, *a contrario*, le nombre d'échecs. On obtient alors une loi binomiale négative.

Cependant, certains auteurs ne sont pas d'accord avec cette terminologie et il arrive que la loi de Pascal soit confondue avec la loi binomiale négative.