

C07-Quiz

Exercice 1.  Comment définir $\int_a^{+\infty} f(t)dt$?

Exercice 2.  Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$.

Exercice 3.  Que dire de $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$.

Exercice 4. 🎵 Rappeler le critère de Riemann de convergence d'une intégrale généralisée.

Exercice 5. 🎵 Donner le théorème de comparaison pour les intégrales impropres.

Exercice 6.  Si deux fonctions sont telles que f et g sont continues sur un intervalle I et si $f(t) \underset{\alpha}{\sim} g(t)$. Que dire de $\int_I g(t)dt$ et $\int_I f(t)dt$?

Exercice 7. ♪ Résoudre l'exercice de référence suivant :
Déterminer la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ en fonction de x .

Réponses

Exercice 1 : Si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(t)dt$ existe et est finie. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exercice 2 : L'intégrale est divergente car

$$\int_1^X \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^X = \ln(X) \longrightarrow +\infty.$$

Exercice 3 : Elle diverge car il n'y a pas de compensation possible sur les intégrales impropres.

Exercice 4 : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$

Exercice 5 : Si f et g sont continues sur un intervalle I . Si $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in I$ et si $\int_I g(t)dt$ converge, alors $\int_I f(t)dt$ converge.

De même, si $\int_I f(t)dt$ diverge, alors $\int_I g(t)dt$ diverge.

Exercice 6 : Les intégrales sont de même nature.

Exercice 7 : Il y a deux problèmes : Un en 0 et un en $+\infty$.

• En 0 : Le problème n'existe que si $x - 1 < 0$. On a bien $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ continue positive sur $]0; 1]$ et $e^{-t}t^{x-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$, donc

$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\int_0^1 t^{x-1}dt$ sont de même nature. Or cette dernière intégrale converge si et seulement si $1 - x < 1$, i.e. $x > 0$.

• En $+\infty$: On a bien dans l'idée que l'exponentiel va l'emporter sur la pauvre puissance de t en $+\infty$. Le tout est de comparer la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ à quelque chose qui converge. Or on sait que

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^{x+1} = 0$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que si $t > A$, alors $e^{-t} t^{x+1} \leq \varepsilon$. D'où $0 < e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{\varepsilon}{t^2}$. Et par

comparaison, la convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{\varepsilon}{t^2} dt$ implique celle de $\int_A^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ et donc de $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

