Intégrales généralisées

Leçon 7
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

On étend la notion d'intégrale dans le cas où la fonction n'est pas définie aux bornes ou si l'es bornes sont infinies..

Table des matières

I Définition

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude d'intégrale dont la borne n'est pas sympathique. En effet, on sait très bien interpréter et calculer $I = \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt$. Il s'agit de l'aire hypographe de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^2}$ et elle vaut $I = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$. De même, on peut calculer l'aire hypographe entre 1 et 3 qui vaut $\frac{2}{3}$, et ainsi de suite, jusqu'à l'aire hypographe entre 1 et n qui vaut $\frac{n-1}{n}$. Mais si l'on veut étendre la notion d'aire sous la courbe et considérer toute l'aire entre 1 et $+\infty$, peut-on dire qu'elle est égale à 1 ?
Eh bien oui, c'est comme cela que l'on définit l'intégrale généralisée (ou impropre) :

> **Définition 7.1** *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(t)dt$ existe et est finie. Sinon, on dit qu'elle diverge.*
> *On étend facilement cette définition à $]-\infty, a]$.*

Un autre exemple (divergent celui-là) : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$. En effet, si l'on calcule l'intégrale avant de passer à la limite, on trouve :

$$\int_1^X \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^X = \ln(X).$$

Or $\lim_{X \to +\infty} ln(X) = +\infty$, donc l'intégrale diverge.

D'autre part, on peut avoir envie d'utiliser le même raisonnement de la limite mais en un réel où la fonction n'est pas définie, comme par exemple pour $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$. Ce coup-ci, au lieu de faire tendre X vers $+\infty$, on fait tendre ε vers 0. On a $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\varepsilon^1 = 2 - \sqrt{\varepsilon}$. Et on voit que la limite est 2.

> **Définition 7.2** *Soit f une fonction continue sur $]a, b]$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(t)dt$ existe et est finie. Sinon, on dit qu'elle diverge.*
> *On étend facilement cette définition à $[a, b[$.*

Là encore, on remarque que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge.

Attention ! Pour les intégrales généralisées, il n'y a pas de phénomènes de compensation comme pour les formes indéterminées de limites. En effet, si on regarde $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$, il est clair que $\displaystyle\int_0^{+\infty} tdt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$. Idem pour l'autre côté $\displaystyle\int_{-x}^{0} tdt$ qui tend vers $-\infty$. Mais si l'on regarde d'un peu plus près, on se rend compte qu'il y a compensation. En effet, $\displaystyle\int_{-x}^{x} tdt = 0$ pour tout x. On serait donc tenté d'écrire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tdt = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} tdt = 0$, mais il n'en est rien. On est forcé d'étudier les deux indéterminations et il suffit qu'une seule soit divergente pour que l'on déclare le tout divergent.

II Intégrale généralisée de Riemann

On s'intéresse ici aux conditions de convergence d'une intégrale généralisée de référence :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ remplit les conditions de continuité nécessaire au calcul de l'intégrale.

• Si $\alpha = 1$, on a déjà calculé $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{t}dt = \ln(X)$ et donc l'intégrale I diverge.

• Si $\alpha < 1$, on a $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^X = \frac{X^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$. Et comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^{1-\alpha} = +\infty$, alors I diverge.

• Si $\alpha > 1$, on a là encore $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^X = \frac{X^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$. Mais comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^{1-\alpha} = 0$, alors I converge.

Ainsi,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

On peut se poser la même question sur l'intervalle $]0;1]$. Le même raisonnement donne le résultat, mais on peut utiliser une autre technique plus astucieuse :

On part de $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ avec $\varepsilon > 0$ que l'on fera tendre vers 0 au final. On pose le changement de variable $u = \frac{1}{t}$. On a alors $du = \frac{-dt}{t^2} \;\Leftrightarrow\; dt = \frac{-du}{u^2}$ et

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 -u^\alpha \times \frac{du}{u^2} = \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{du}{u^{2-\alpha}}$$

D'après ce que l'on vient de voir, cette dernière intégrale converge si et seulement si $2-\alpha > 1$ i.e. $\alpha < 1$. Ainsi, on a

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1}$$

On peut remarquer que la situation est symétrique de la précédente. Le problème qui était en $+\infty$ se retrouve en 0.

Remarque: Il ne faut pas être déstabilisé si les bornes changent un peu.... En effet, si l'on demande de déterminer la convergence de $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}dt$ avec $a > 0$, il est clair qu'elle diverge car il suffit de découper l'intervalle : $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt + \int_1^a \frac{1}{t^\alpha}dt$. La dernière intégrale est finie car non généralisée et donc l'intégrale cherchée diverge.

III Théorèmes de comparaison

De même que pour tout calcul de limites, que ce soit de fonctions, de suites ou de séries, on peut comparer les convergences et les divergence :

Théorème 7.3 *Si f et g sont continues sur un intervalle I. Si $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in I$ et si $\int_I g(t)dt$ converge, alors $\int_I f(t)dt$ converge.*
De même, si $\int_I f(t)dt$ diverge, alors $\int_I g(t)dt$ diverge.

On a même un rapport avec les équivalents :

Théorème 7.4 *Si f et g sont continues sur un intervalle I. Si $f(t) \underset{\alpha}{\sim} g(t)$ (où α est la borne à problème), alors $\int_I g(t)dt$ et $\int_I f(t)dt$ sont de même nature.*

IV Exercice classique

On veut calculer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

Il y a deux problèmes : Un en 0 et un en $+\infty$.

• En 0 : Le problème n'existe que si $x - 1 < 0$. On a bien $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ continue positive sur $]0;1]$ et $e^{-t}t^{x-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$, donc $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\int_0^1 t^{x-1}dt$ sont de même nature. Or cette dernière intégrale converge si et seulement si $1 - x < 1$, i.e. $x > 0$.

• En $+\infty$: On a bien dans l'idée que l'exponentiel va l'emporter sur la pauvre puissance de t en $+\infty$. Le tout est de comparer la fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ à quelque chose qui converge. Or on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x+1} = 0$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que si $t > A$, alors $e^{-t}t^{x+1} \leq \varepsilon$. D'où $0 < e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{\varepsilon}{t^2}$. Et par comparaison, la convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{\varepsilon}{t^2}dt$ implique celle de $\int_A^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ et donc de $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.