

C08-Quiz

Exercice 1.  Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Exercice 2.  Quelle est la définition d'une densité de probabilité ?

Exercice 3. ♪ Si X est de densité f , quelle est la stratégie pour déterminer la densité de $Y = \varphi(X)$?

Exercice 4. ♪ Quelles sont les conditions nécessaires sur une fonction F pour qu'elle soit une fonction de répartition d'une variable aléatoire ?

Exercice 5. 🎵 Donner la définition de l'espérance (et du moment d'ordre r) d'une variable aléatoire.

Exercice 6. 🎵 Donner la définition de la variance d'une variable aléatoire.

Exercice 7. ♪ Rappeler l'Ingélité de Markov.

Exercice 8. ♪ Rappeler l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 9. 🎵 Quelle est la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires ?

Exercice 10. ♪ Rappeler la loi faible des grands nombres.

Exercice 11. 🎵 Rappeler la densité, l'espérance et la variance de la loi uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 12. 🎵 Rappeler la densité, l'espérance et la variance de la loi exponentielle de paramètre λ .

Exercice 13. 🎵 Rappeler la densité, l'espérance et la variance de la loi normale de paramètres 0 et 1.

Exercice 14. ♪ Énoncer le théorème central limite.

Exercice 15. ♪ Tracer sur un papier le diagramme des approximations du cours.

Exercice 16. ♪ En quoi consiste le problème de correction de continuité ?

Réponses

Exercice 1 : Si X est une variable aléatoire, on appelle **fonction de répartition** la fonction F définie par

$$F(\alpha) = p(X \leq \alpha)$$

Exercice 2 : Une fonction f est une **densité de probabilité**

- ① f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points,
- ② $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- ③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Exercice 3 : On écrit $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\varphi(X) \leq x)$ que l'on simplifie car on connaît f_X . Ensuite, il suffit de dériver F_Y pour trouver la densité de Y .

Exercice 4 : Il suffit que F soit continue, croissante, dérivable (sauf en un nombre fini de réels) et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Exercice 5 : Si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge, alors $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$.

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$ converge, alors le moment d'ordre r est

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt.$$

Exercice 6 : Si $E(X)$ existe et si $\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$ existe,

$$\text{alors } V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt.$$

Exercice 7 : Inégalité de Markoff. Soit Z une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. On suppose que Z est positive ou nulle. On a :

$$\forall a > 0 \quad p(Z \geq a) \leq \frac{E(Z)}{a}.$$

Exercice 8 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance finie σ^2 . On a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad p(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Exercice 9 : On dit que la suite de variables aléatoires (X_n) **converge en probabilité** vers la constante a si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\eta > 0$, il existe n_0 tel que :

$$n > n_0 \Rightarrow p(|X_n - a| > \varepsilon) < \eta.$$

Exercice 10 : Loi faible des grands nombres Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes ayant une espérance μ et une variance finie σ^2 . On a en posant $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

Exercice 11 : On dit que la v.a.r. X suit une **loi uniforme** sur $[a, b]$, notée $\mathcal{U}([a, b])$, si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, la fonction de répartition vaut

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}.$$

$$\text{Et on a } E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exercice 12 : On dit que la v.a.r. X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ , notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Et on a } E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 13 : On dit que la v.a.r. X suit une **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Et on a bien sûr, $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

Exercice 14 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes d'espérance μ et d'écart type σ . Soit

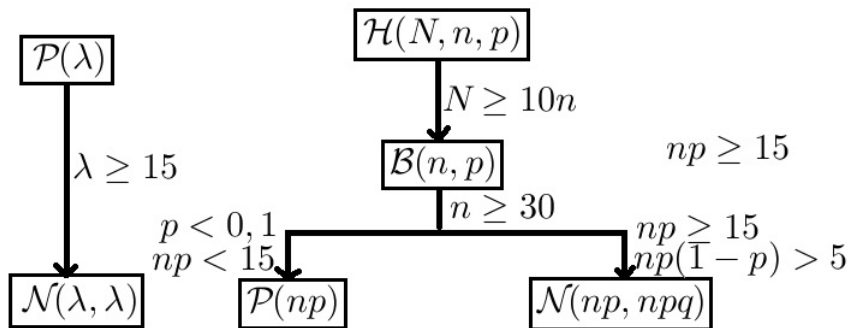
$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$. On a alors clairement $E(Z_n) = \mu$ et

$V(Z_n) = \frac{\sigma^2}{n}$. Si on pose de plus $T_n = \frac{Z_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, la variable centrée

réduite associée à Z_n , alors

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{T_n}(x) = \Phi(x)}$$

Exercice 15 :



Exercice 16 : En utilisant une loi continue X , pour approcher une loi discrète Y , on crée une distortion. Là où $P(X = k) = 0$, on avait $P(Y = k)$ qui pouvait être non nul. Aussi, il est préférable de faire correspondre dans les calculs $P(Y = k)$ avec $P(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2})$.

