V.A.R. continues

Leçon 8
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Dernier chapitre sur les lois de probabilité. On se concentre ici sur les lois à support infini réel.

Table des matières

I Généralités

On travaille sur $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

Le problème du dé mathématique : Voici un jeu passionnant : on pense à un entier entre 1 et 6 et on jette un dé. Quelle est notre probabilité de gagner (*i.e.* d'avoir deviné le bon nombre) ?

Une chance sur six bien sûr. Mais si l'on prend un dé mathématique, donc magique ; un dé qui donne un nombre réel entre 0 et 1. Alors le problème est tout différent. En effet, la probabilité que j'obtienne le nombre auquel je pense est .... 0.

Vous ne le voyez pas comme cela parce que vous avez pensé à $\frac{1}{2}$, mais moi qui avait choisi $\ln 2 \simeq 0,69$, je le vois bien... En revanche, si je vous demande : "Quelle est la probabilité que le nombre sortant soit plus grand que $\frac{1}{2}$, là, je vois bien que cette probabilité vaut $\frac{1}{2}$. Et, plus généralement, si $\alpha \in [0,1]$, alors la probabilité que le nombre qui sort soit plus petit que α est α.

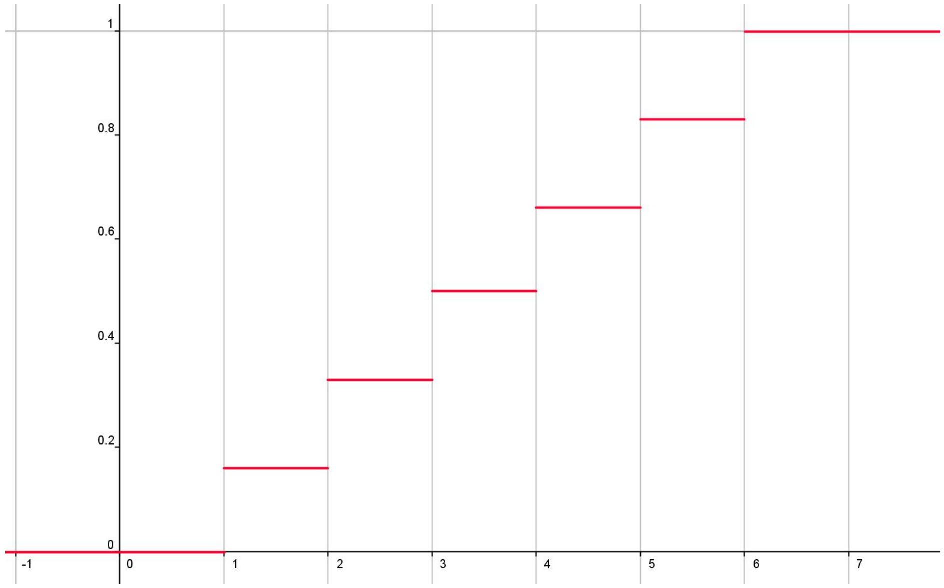
On voit bien sur cet exemple que notre théorie probabiliste basée sur les évènements élémentaires a fait long feu et qu'il faut plutôt dorénavant considérer des évènements "au plus égal à" ou "au moins égal à".

Avec l'exemple précédent du dé magique, si on pose X la variable aléatoire égale au résultat du dé, on a bien, si $\alpha \in [0,1]$, alors $p(X \leq \alpha) = \alpha$.

Définition 8.1 *Si X est une variable aléatoire, on appelle* ***fonction de répartition*** *la fonction F définie par*

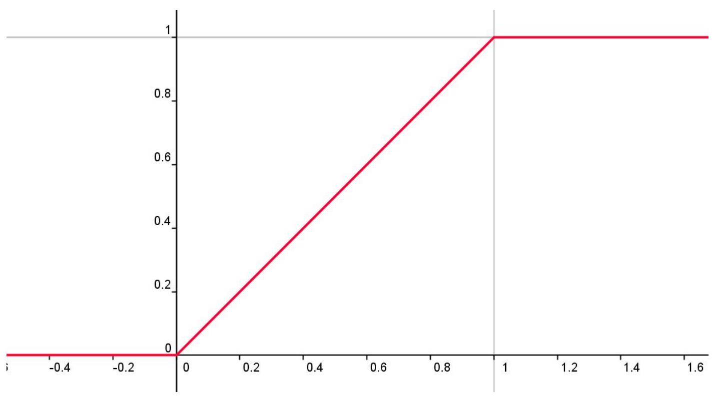
$$F(\alpha) = p(X \leq \alpha)$$

Exemple: Si on prend la variable aléatoire X donnant l'issue d'un dé normal à six faces, on a la fonction F qui a pour représentation graphique :



En effet, si on considère par exemple $F(2,3) = p(X \leq 2,3)$, on trouve bien $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car il faut ajouter les deux évènements élémentaires constitués par les issues 1 et 2...

Pour le dé magique, on peut essayer de faire de même, mais comme $F(\alpha) = p(X \leq \alpha) = \alpha$ quand $\alpha \in [0,1]$, on trouve le graphe suivant pour la fonction de répartition :



Mais il y a mieux. En effet, on peut avoir une vision plus "progressive" de la variable aléatoire en utilisant le concept de distribution, ce que l'on appelle la densité :

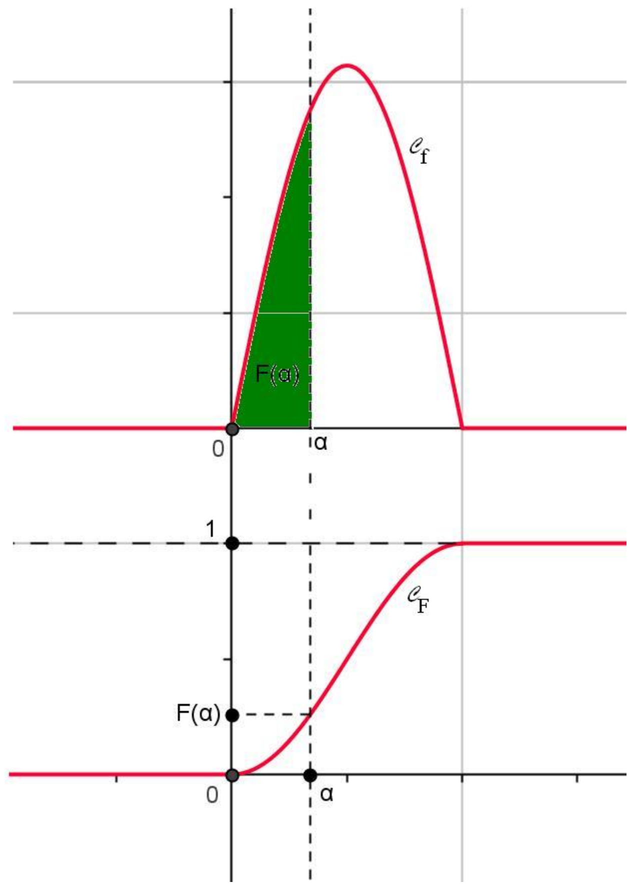
Définition 8.2 *Une fonction f est une **densité de probabilité***

i. f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points,

ii. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$

Il s'agit de voir la probabilité comme une aire. En comprenant que f est la dérivée de F (ou que F est une primitive de f, ce qui explique les notations). Voici le dessin fondamental qui permet de comprendre le concept :



Proposition 8.3 *Soit X une v.a.r. de densité f, de fonction de répartition F. Alors F est continue sur $\mathbb{R}$ et en tout point x_0 où f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$.*

<u>*Exemple:*</u> $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \notin \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

• f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$. Donc f est une densité de probabilité.

• $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Proposition 8.4 *Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Si F est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, alors X est une variable aléatoire réelle à densité.*

Toute fonction positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F' en tout point de continuité de F' est une densité de X.

<u>*Exemple:*</u> La variable aléatoire X est de densité f. Déterminer la loi de $Y = aX + b$ ($a \neq 0$).

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) &= p(Y \leq x) \\ &= \begin{cases} p\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ p\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F\left(\frac{x-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ 1 - F\left(\frac{x-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ (car F l'est) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, donc Y est une variable aléatoire à densité g telle que :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \frac{-1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right) & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

i.e. $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)}$.

Exercice 1. ♪

La variable aléatoire X est de densité f. Déterminer la loi de X^2 et montrer que la densité de cette variable aléatoire est

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right] & \text{si } x > 0. \end{cases}.$$

Exercice 2. ♩

La variable aléatoire X est de densité f. Déterminer la loi et la densité de $Y = e^X$.

Proposition 8.5 *Si une fonction F est continue, croissante, dérivable sauf peut-être en un nombre fini de points telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, alors F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.*

Remarque: En fait, dans la proposition précédente, il suffit que F soit continue à droite en tout réel (ceci vient de l'intégration sur un intervalle de type $]-\infty, x]$).

II Espérance, variance et écart-type

Définition 8.6 *Soit X une variable aléatoire à densité f.*

Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge, alors $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.

Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge, alors $E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$.

Si $E(X)$ existe et si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt$ existe, alors $V(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt$.

Remarque: Si $E(X)$ n'existe pas, alors $V(X)$ non plus.

Proposition 8.7 *Soit X une variable à densité telle que $E(X)$ existe. Alors $V(X)$ existe si et seulement si $E(X^2)$ existe.*

Démonstration: Sous réserve d'existence,

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - 2E(X) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt}_{E(X)} + E(X)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - E(X)^2.
\end{aligned}$$

donc $V(X)$ existe si et seulement si $E(X^2)$ existe et on retrouve la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

□

Exemple: La **loi de Cauchy** n'admet pas d'espérance. Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On va voir que f définit bien une densité de variable aléatoire sur $\mathbb{R}$ qui n'admet pas d'espérance :

Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}$, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi}[\text{Arctan}\, x]_{-\infty}^{+\infty} = 1$. Donc f est bien une densité de probabilité.
Mais $\varphi(X) = \displaystyle\int_0^X tf(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^X = \frac{1}{2\pi}\ln(1+X^2) \underset{X\to+\infty}{\longmapsto} +\infty$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ diverge et $E(X)$ n'existe pas.

Exercice 3. ♪ *Un classique !*

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1) Montrer que f définit bien une densité de variable aléatoire continue.
2) Déterminer son espérance, si elle existe.
3) Idem avec la variance.

Exercice 4. ♪ *(CERDI 2011)*

Soient X et Y deux variables aléatoires ayant comme fonction de densité jointe :

$$f(x,y) = x + y \qquad \text{pour } (x,y) \in [0,1]^2.$$

1) Trouver les fonctions de densité marginale $f_1(x)$ et $f_2(y)$ et montrer que $f(x,y) \neq f_1(x) \times f_2(y)$.
2) Déterminer l'espérance et la variance de X.

III Deux inégalités

Quand les lois sont trop compliquées, il peut être parfois intéressant d'utiliser des approximations des probabilités. En voici deux :

Proposition 8.8 ***Inégalité de Markov*** *Soit Z une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. On suppose que Z est positive ou nulle* [a]*. On a :*

$$\forall a > 0 \quad p(Z \geq a) \leq \frac{E(Z)}{a}.$$

a. En fait, ici, il suffit de "presque surement" positive ou nulle, i.e. la v.a.r. est positive ou nulle sur un sous-ensemble de Ω de probabilité 1

Démonstration: On a pour tout $\omega \in \Omega$, l'inégalité $Z(\omega) \geq a 1_{\{Z(\omega) \geq a\}}$ qui est vraie dès que $a \geq 0$. donc $E(Z) \geq E(a 1_{\{Z(\omega) \geq a\}}) = ap(Z \geq a)$

□

On en déduit le corollaire suivant :

Proposition 8.9 ***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*** *Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance finie σ^2. On a :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad p(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Remarque: Cette formule peut aussi s'écrire $\forall \varepsilon > 0 \quad p(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \dfrac{1}{k^2}$ en posant $\varepsilon = k\sigma$.

Démonstration: On utilise l'inégalité de Markov. Il suffit de poser $Z = (X - E(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$. En remarquant que $E((X-E(X))^2) = V(X)$ et que $p((X-E(X))^2 \geq \varepsilon^2) = p(|X-\mu| \geq \varepsilon)$, on obtient le résultat.

□

Remarque: On peut aussi la démontrer à la main en distinguant deux cas : si X est discrète ou pas :

- Si X est discrète : On écrit $p(X = x_i) = p_i$ (éventuellement nuls à partir d'un certain rang si la variable est à valeurs finies). On note $I = \{i \in \mathbb{N},\ |x_i - E(X)| \geq \varepsilon\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i\in I} (x_i - E(X))^2 p_i + \sum_{i\notin I} (x_i - E(X))^2 p_i \\
&\geq \sum_{i\in I} (x - E(X))^2 p_i \geq \sum_{i\in I} \varepsilon^2 p_i = \varepsilon^2 \sum_{i\in I} p_i \\
&\geq \varepsilon^2 p(|X - E(X)| \geq \varepsilon).
\end{aligned}$$

- Si X est ~~indiscrète~~ continue :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_{E(X)-\varepsilon}^{E(X)+\varepsilon} (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_{E(X)-\varepsilon}^{E(X)+\varepsilon} (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} \varepsilon^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_{E(X)-\varepsilon}^{E(X)+\varepsilon} \varepsilon^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&\geq \varepsilon^2 p(|X - E(X)| \geq \varepsilon).
\end{aligned}$$

En général, l'inégalité de Tchebychev est assez grossière. En effet, la majoration obtenue est trop forte. Voyons cela sur une démonstration qui permet de voir les termes qui ont été négligés : On utilise la partition $(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ et $(|X-\mu| < \varepsilon)$. On a donc

$$p(|X-\mu| \geq \varepsilon) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x-\mu|\geq\varepsilon}} p(X=x).$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = V(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mu)^2 p(X=x) \\
&= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x-\mu|\geq\varepsilon}} (x-\mu)^2 p(X=x) + \underbrace{\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x-\mu|<\varepsilon}} (x-\mu)^2 p(X=x)}_{\geq 0} \\
&\geq \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x-\mu|\geq\varepsilon}} \underbrace{(x-\mu)^2}_{\geq\varepsilon^2} p(X=x) \\
&\geq \varepsilon^2 \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x-\mu|\geq\varepsilon}} p(X=x) \\
&\geq \varepsilon^2 p(|X-\mu| \geq \varepsilon).
\end{aligned}$$

On a donc négligé toutes les valeurs de X telle que $|X-\mu| < \varepsilon$.

Voyons sur deux exemples combien cette majoration peut être loin de la valeur attendue, cela nous aidera à comprendre comment elle fonctionne.

Exemple: Avec une loi discrète : Considérons un dé pipé et X la variable aléatoire réelle égale au numéro de la face qui vérifie :

x	1	2	3	4	5	6
$p(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

On calcule alors l'espérance : $E(X) = \dfrac{37}{10}$ et le moment d'ordre 2 qui vaut $E(X^2) = \dfrac{157}{10}$. Et donc la variance vaut $V(X) = \dfrac{201}{100}$.

- D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$p(|X-3,7| \geq 2) \leq \boxed{\frac{2,01}{4}}.$$

- Et par le calcul direct, on a

$$p(|X-3,7| \geq 2) = p(X \geq 5,7) + p(X \leq 1,7) = p(X=1) + p(X=6) = \boxed{\frac{2}{10}}.$$

Les deux valeurs sont très éloignées comme on le voit nettement.

Exemple: De même avec une loi normale, pour $\varepsilon = 2\sigma$, on obtient $p(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{4}$ avec Bienaymé-Tchébychev, alors que l'on trouve en réalité $p(|X-\mu| \geq \varepsilon) = 2(1-\Phi(2)) \simeq 0,0455$.

En effet, dans la cas d'une loi normale, on a par calcul direct$p(|X-\mu| \geq \varepsilon) = \Phi(\frac{-\varepsilon}{\sigma}) + 1 - \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 2(1-\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}))$.

Définition 8.10 *On dit que la suite de variables aléatoires (X_n)* ***converge en probabilité*** *vers la constante a si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\eta > 0$, il existe n_0 tel que :*

$$\boxed{n > n_0 \Rightarrow p(|X_n - a| > \varepsilon) < \eta.}$$

Remarque: En particulier, lorsque $E(X_n) \to a$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff implique qu'il suffit de prouver que $V(X_n) \to 0$ pour établir la convergence en probabilité de (X_n) vers a.

D'autre part, une application bien connue de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev est

Proposition 8.11 ***Loi faible des grands nombres*** *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes ayant une espérance μ et une variance finie σ^2. On a en posant $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \to +\infty} p(|Z_n - \mu|) \geq \varepsilon) = 0$$

Remarque: On peut dire ainsi que (X_n) converge en probabilité vers μ. Ce résultat assure que la moyenne empirique est un estimateur convergent de l'espérance (voir leçon sur les estimateurs).

Démonstration: La démonstration vient de l'application de Bienaymé-Tchebychev à Z_n, ce qui donne

$$p(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

□

Exercice 5. ♩ *Théorème de Bernoulli*

Soit Z_n le nombre moyen de succès au cours d'une série de n épreuves identiques et indépendantes. On suppose que la probabilité d'obtenir un succès lors d"une épreuve est égale au réel p. Montrer que l'on a $p(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

IV Lois usuelles

IV.1 Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$

Définition 8.12 *On dit que la v.a.r. X suit une **loi uniforme** sur $[a,b]$, notée $\mathcal{U}([a,b])$, si*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6. ♪

Déterminer la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[a,b]$.

Proposition 8.13 *Si X suit une loi uniforme de paramètre $[a,b]$, alors*

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Démonstration: Exercice.

Exercice 7. 𝅗𝅥

Roméo et Juliette décident de se retrouver pour fuir leur famille. Ils se donnent rendez-vous entre 12h et 13h sous le célèbre balcon de Verona. On note X et Y les instants, en heure, d'arrivées respectifs de Roméo et Juliette.

1) Pourquoi avoir choisi ces lettres pour les variables aléatoires ?

2) Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent si on estime que pour des raisons de sécurité, ils n'attendront pas plus de 10 minutes chacun.

3) On suppose dans cette question qu'ils s'attendent un temps $T \in [0;1]$. Quel est le temps moyen d'attente ?

4) Pour quelle valeur de T le temps d'attente moyen est-il maximal.

IV.2 Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Définition 8.14 *On dit que la v.a.r. X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textit{si } x \geq 0 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 8.15 *Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors*

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Exercice 8. ♪

Montrer que la loi exponentielle est **sans mémoire**, i.e. la probabilité que X dépasse $t_0 + h$ sachant que X est déjà plus grand que t_0, est égale à la probabilité de dépasser $t_0 + h$.

Autrement dit, appliqué à un composant électronique, cela veut dire que la probabilité qu'il vive h de plus est indépendant du temps qu'il a vécu auparavant.

Réciproquement, on peut montrer (mais c'est plus délicat - il faut connaître les équations différentielles) qu'une loi sans mémoire est nécessairement exponentielle.

IV.3 Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition 8.16 *On dit que la v.a.r. X suit une **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement,

Définition 8.17 *On dit que la v.a.r. X suit une **loi normale** de moyenne μ et d'écart-type σ, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On a alors $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

Attention ! L'ancienne nomenclature imposait que le second paramètre soit l'écart-type et non la variance comme c'est le cas depuis 2010 en suivant les normes internationales. On fera donc bien attention à ne pas se tromper en lisant de "vieux" textes. (Le problème ne se pose évidemment pas avec une loi réduite)

Remarque: Il n'est pas clair, a priori, que cette densité fournisse une loi de probabilité. En effet, il faut vérifier que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = 1$. On peut le montrer de différentes façons. En voici une très élémentaire dans le cas d'une loi normale centrée réduite :

Exercice 9. 𝅗𝅥 *Intégrale de Gauss* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

On pose $g(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$ et $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = 2u'(x) \times u(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

2) En admettant que l'on peut dériver la fonction h sous l'intégrale (théorie des intégrales dépendant d'un paramètre), i.e.

Si $w(x) = \displaystyle\int_a^b v(x,t)dt$, alors (sous condition de continuité de $t \longmapsto v(x,t)$, de $x \longmapsto v(x,t)$ et de $x \longmapsto \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)$), w est dérivable et $w'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)dt$.

Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $h'(x) = -2x \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$.

3) Montrer que $g(x) + h(x)$ est constante pour tout x.

4) Déterminer la valeur de $(g+h)(x)$.

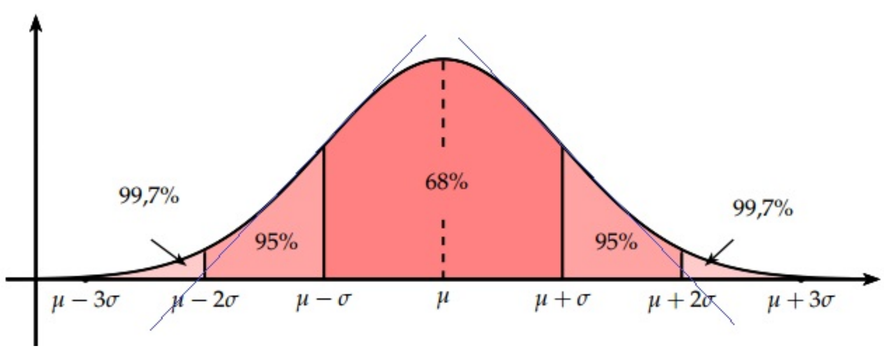
5) Montrer que $0 \leq \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

6) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

7) Montrer que $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ définit bien une densité.

Proposition 8.18 *Si X suit une **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.*

Proposition 8.19 *Si X suit une **loi normale** $\mathcal{N}(0,1)$, alors la fonction de répartition F satisfait $F(-x) = 1 - F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*



Théorème 8.20 *(Central limite) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes d'espérance μ et d'écart type σ. Soit $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$. On a alors clairement $E(Z_n) = \mu$ et $V(Z_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$. Si on pose de plus $T_n = \dfrac{Z_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, la variable centrée réduite associée à Z_n, alors*

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = \Phi(x)}$$

V Approximations

- Si $N \geq 10n$ alors $\mathcal{H}(N, n, p) \simeq \mathcal{B}(n, p)$.

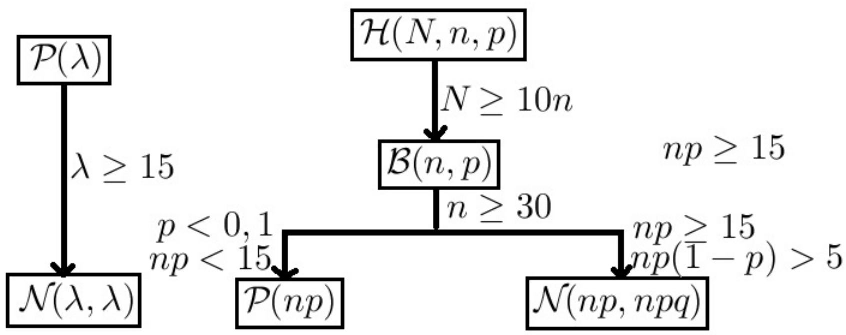
- Si $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$ alors $\mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{P}(np)$.

- Si $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $npq > 5$, alors $\mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{N}(np, npq)$.

Attention dans ce cas à la correction de continuité. En effet :
quand on approche une loi discrète par une loi continue, on doit procéder à des corrections car $p(X = k)$ devient $p(\widetilde{X} = k)$ qui est nul, ce qui n'était pas le cas auparavant. Ainsi :
$p(X = 0) = p(\widetilde{X} < 1) = F(0,5)$, $p(X = k) = p(k - 0,5 \leq \widetilde{X} \leq k + 0,5)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $p(X \leq n) = p(\widetilde{X} \geq n + 0,5) = F(n + 0,5)$.

- Si $\lambda \geq 10$ alors $\mathcal{P}(\lambda) \simeq \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Attention là encore à la correction de continuité : $p(X \leq 1) = p(X < 2) = p(\widetilde{X} \leq 1,5) = F(1,5)$.



Remarque: Pour démontrer la validité de ces approximations, on procède par équivalences. Par exemple, pour montrer l'approximation de la loi hypergéométrique par une binomiale, il suffit de montrer que

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N \to +\infty}{\sim} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

en posant $M = pN$.

Exercice 10. *Correction de continuité*

Cinq cents personnes désirent se rendre à un congrès. Pour cela, elles ont le choix entre deux avions. On admet que les personnes choisissent l'un des deux avions au hasard et indépendamment les uns des autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes choisissant le premier avion.

1) Définir la loi de X. Approcher cette loi par une loi continue dont on donnera les paramètres.

2) En utilisant cette approximation, déterminer le nombre de places que les organisateurs du congrès devraient réserver dans chaque avion pour que la probabilité qu'il manque des places dans l'un des deux avions soit inférieure à $0,005$. **a)** Sans correction de continuité.

b) Avec.