C09-Quiz

Exercice 1. ♪ Rappeler les axiomes que doivent satisfaire la loi interne et la loi externe d'un espace vectoriel (il y en a 2×4).

Exercice 2. ♪ Quelles sont les trois propriétés qui définissent un sous-espace vectoriel ?

Exercice 3. ♪ Quelle est la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ?

Exercice 4. ♪ Donner la défintion d'une variété affine.

Exercice 5. Donner la défintion d'une famille libre.

Exercice 6. ♬ Pour avoir une base d'un sous-espace vectoriel, que faut-il ?

Exercice 6. ♪ Pour avoir une base d'un sous-espace vectoriel, que faut-il ?

1) Un système générateur et libre.
2) Un système libre et maximal.
3) Un système libre et minimal.
4) Un système générateur et maximal.
5) Un système générateur et minimal.
6) Un système minimal et maximal.

Exercice 7. ♪ Déterminer un système génréateur de

$$F = \{(2x - y + 3z, x + y, 3x - z),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Exercice 8. ♪ Rappeler les trois exemples type d'espaces vectoriels (dimension finie, infinie discrète et infinie continue).
Où se trouve $\mathbb{R}_n[X]$ dans cet classification ? Et $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 9. ♪ Rappeler la formule de Grassman.

Exercice 10. ♪ Rappeler la définition d'une application linéaire et d'une forme linéaire.

Exercice 11. 𝅘𝅥𝅯 Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, que vaut $f(0_E)$?

Exercice 12. ♬ Donner les défintions de noyau et image d'une application linéaire.

Exercice 13. ♪ Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire : $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x-y, y) \end{array}$.

Exercice 14. ♪ Rappeler le lien entre injectivité et noyau. En faire la démonstration.

Exercice 15. ♪ Enoncer le théorème du rang.

Réponses

Exercice 1 : Soit E un ensemble non vide muni :

• d'une **loi de composition interne** notée $+$ (i.e. $\forall (a,b) \in E^2,\ a+b \in E$) qui a les propriétés suivantes :

1. associative (i.e. $\forall (a,b,c) \in E^3$, $a+(b+c) = (a+b)+c$).
2. existence d'un neutre (i.e. $\exists e \in E,\ \forall a \in E$,tel que $a+e = e+a = a$).
3. existence d'un symétrique (i.e. $\forall a \in E$, $\exists a' \in E$ tel que $a+a' = a'+a = e$).
4. commutative (i.e. $\forall (a,b) \in E^2$, on a $a+b = b+a$).

On dit alors que $(E,+)$ est un **groupe commutatif**.

• d'une **loi externe** notée . (i.e. $\forall a \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.a \in E$) qui a les propriétés suivantes $\forall (a,b) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\lambda.(a+b) = \lambda.a + \lambda.b$.

2. $(\lambda + \mu).a = \lambda.a + \mu.a.$
3. $\lambda.(\mu.a) = (\lambda \times \mu).a.$
4. $1.a = a.$

Exercice 2 : L'ensemble F est un **sous-espace vectoriel** de l'espace vectoriel E si :

1. $F \subset E$,
2. $F \neq \emptyset$,
3. $\forall (a, b) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda.a + \mu.b \in F$ (stabilité pour les combinaisons linéaires).

Exercice 3 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que F et G sont **supplémentaires** si :

1. $F \cap G = \{0_E\}$,
2. $F + G = E$.

On dit alors que F et G sont en somme directe et on note $E = F \oplus G$.
Exercice 4 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **variété affine** G de direction F, l'image de F par une translation de vecteur a fixé.

$$G = \{a + u,\ u \in F\}.$$

Exercice 5 : La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite **famille libre** de E si et seulement si :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i . u_i = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = 0\ \forall i \in I.$$

Si un seul des λ_i est non nul, on dit que la **famille est liée**.
Exercice 6 : Libre et maximal, générateur et minimal ou libre et générateur.
Exercice 7 :

$$\begin{pmatrix} 2x-y+3z \\ x+y \\ 3x-z \end{pmatrix} = x.\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{a} + y.\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} + z.\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{c}$$

Les vecteurs a, b et c sont alors des vecteurs générateurs de F.

Exercice 8 : L'espace classique $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.
$(\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1)$
L'espace des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie discrète. (comme $\mathbb{R}[X]$)
L'espace des focntions $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est de dimension infinie continue.

Exercice 9 : $\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$.

Exercice 10 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Une **application linéaire** (ou **homomorphisme**) de E vers F est une application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall(u,v) \in E^2, \quad f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v).$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F. Pour une forme linéaire, il faut que $F = \mathbb{R}$.
Exercice 11 : $f(0_E) = 0_F$.
Exercice 12 : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors
$\operatorname{Ker} f = \{a \in E,\ f(a) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$ s'appelle le **noyau** de f. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E.
$\operatorname{Im} f = \{f(a) \in F,\ a \in E\} = f(E)$ s'appelle **l'image** de f. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de F. On appelle **rang** de f la dimension de l'image de f et on note $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$.
Exercice 13 : Pour le noyau, il suffit d'écrire que l'on cherche les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0).$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

• Pour l'image, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.

Ici, $Imf = \operatorname{Vect}(f(1,0), f(0,1)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 14 : f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
En effet, la démonstration est intéressante : On a déjà montré que $f(0_E) = 0_F$, ce qui assure que $\operatorname{Ker} f$ n'est pas vide.
C.N. : Dire que f est injective, si on se souvient du cours sur les applications, c'est dire que pour tout $(u, v) \in E$, si $f(u) = f(v)$, alors $u = v$. Soit $w \in \operatorname{Ker} f$, alors on a $f(w) = 0_F = f(0_E)$, et par injectivité, $w = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
C.S. : Imaginons maintenant que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. On suppose que $f(u) = f(v)$. Par linéarité, on a $f(u - v) = 0_F$. Donc $u - v \in \ker f$ et $u - v = 0_E$. Ainsi, $u = v$.
Exercice 15 : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.