Espaces vectoriels

Leçon 9
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Essentiellement des définitions dans ce cours. On tente d'apporter surtout des modèles pour éclaircir les notions abordées. Les exercices sont basiques et servent à acquérir des automatismes.

Table des matières

I Espaces vectoriels

Définition 9.1 *Soit E un ensemble non vide muni :*
• *d'une **loi de composition interne** notée $+$ (i.e. $\forall (a,b) \in E^2,\ a+b \in E$) qui a les propriétés suivantes :*

i. associative (i.e. $\forall (a,b,c) \in E^3,\ a+(b+c) = (a+b)+c$).

ii. existence d'un neutre (i.e. $\exists e \in E,\ \forall a \in E$, tel que $a+e = e+a = a$).

iii. existence d'un symétrique (i.e. $\forall a \in E,\ \exists a' \in E$ tel que $a+a' = a'+a = e$).

iv. commutative (i.e. $\forall (a,b) \in E^2$, on a $a+b = b+a$).

*On dit alors que $(E,+)$ est un **groupe commutatif**.*
• *d'une **loi externe** notée . (i.e. $\forall a \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda.a \in E$) qui a les propriétés suivantes $\forall (a,b) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:*

i. $\lambda.(a+b) = \lambda.a + \lambda.b$.

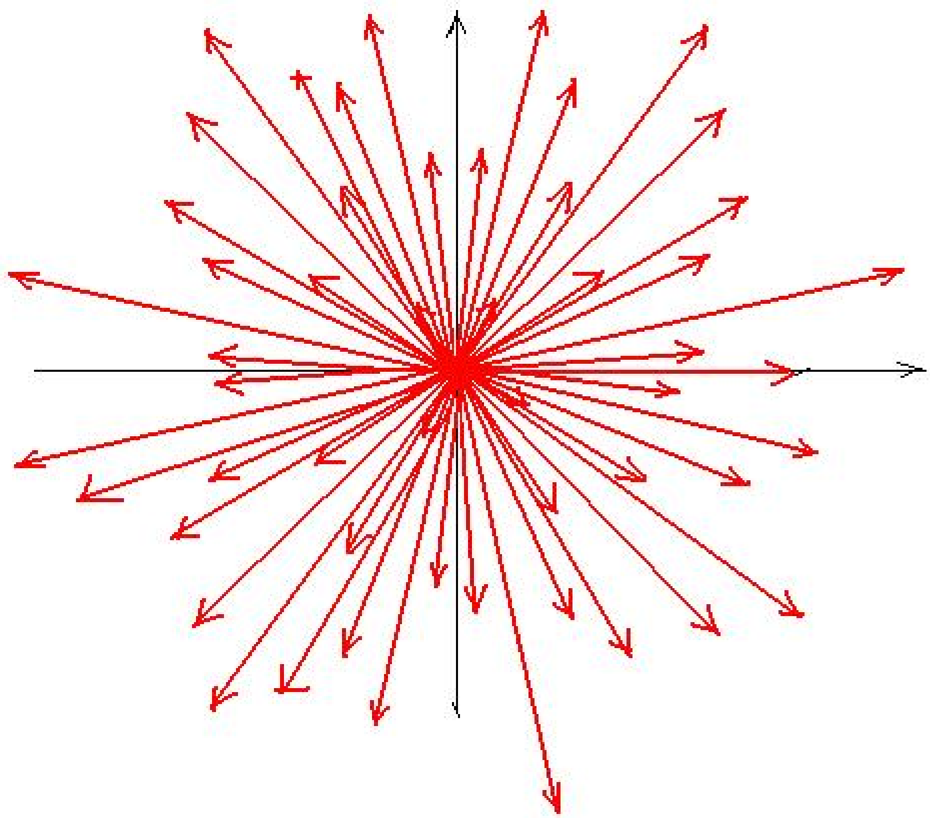
ii. $(\lambda+\mu).a = \lambda.a + \mu.a$.

iii. $\lambda.(\mu.a) = (\lambda \times \mu).a$.

iv. $1.a = a$.

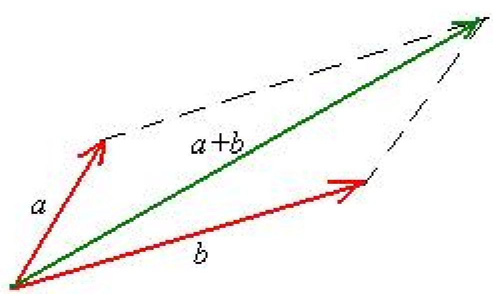
*On dit que $E(,+,.)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$. Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs**.*

Exemple: Le premier exemple est, bien sûr, celui que l'on connaît le mieux : le plan $\mathbb{R}^2$ (ou l'espace $\mathbb{R}^3$). Puisque les objets que l'on construit au lycée s'appelle des vecteurs eux aussi, c'est que ce doit être la même chose. Eh ben oui !
Si l'on prend le plan réel. On pose alors $E = \mathbb{R}^2$ dans la définition précédente et que l'on se raccroche aux branches pour décrypter ces propriétés, que se passe-t-il ?
Tout d'abord, il faut rappeler qu'un vecteur du plan est la donnée d'une direction (la rue Ferbos par exemple), d'un sens (le sens que je prends tous les matins à vélo et que les gendarmes disent être interdit) et d'une norme (sa longueur). On voit que, mathématiquement, un vecteur n'a pas de point d'application comme en physique. Aussi, on peut dire que le même vecteur peut être tracé cours de la Marne (puisque les deux rues sont parallèles - donc ont même direction). Ainsi, il y a une infinité de représentants pour le même vecteur. On peut donc ne considérer dorénavant que les vecteurs ayant pour origine l'origine d'un repère fixé du plan. Avec cette première remarque, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ ressemble un peu à ça :



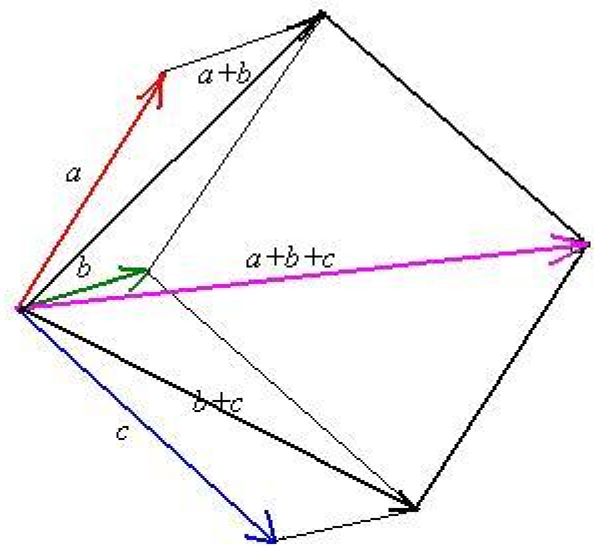
Voyons maintenant ce que veut dire ce charabia dans la définition :

• Pour la **loi interne** tout d'abord : On veut une loi sur les vecteurs qui se note + en plus!... J'aurais tendance à dire que l'addition de deux vecteurs, c'est pas mal. Si j'ajoute deux vecteurs, j'obtiens un vecteur avec la règle du parallélogramme de seconde...



Ca paraît évident mais il est moins évident que les propriétés de la définition soit vraies. Il faut vérifier point par point :

Pour la $i.$, on fait un dessin pour s'en convaincre :



Pour la *ii.*, j'imagine que si on prend le vecteur nul, ça marche sans trop se poser de question.

Pour la *iii.*, il suffit de prendre l'opposé d'un vecteur (i.e. même direction, même norme et sens contraire - la rue Ferbos dans le sens gendarmes cette fois-ci).

Pour la *iv.*, par construction du parallélogramme, qu'on le parcourt dans un sens ou dans l'autre, on obtient le même vecteur somme au final...

• Qu'en est-il de la **loi externe** ? il faut faire agir les réels sur l'ensemble des vecteurs. Rien de plus simple : On utilise les homothéties (gros mot pour dire que l'on dilate ou que l'on rétrécie avec la subtilité du retournement quand le réel est négatif). Ainsi, $\lambda.a$ signifie juste que l'on a gardé la direction de a et qu'on a multiplié la norme par $|\lambda|$. Le sens étant conservé si $\lambda > 0$ et opposé sinon. Rien de bien nouveau là-dedans. Les propriétés assurent juste que l'on peut faire les calculs (composer les homothéties) dans tous les sens. Ce qui se comprend car les homothéties ont toutes le même centre. Là où il convient d'être très précis, c'est dans la signification des symboles opératoires dans les propriétés énoncées. En effet, si le . est toujours la loi externe, le + est plus ambiguë :

$$\lambda.(a \underset{\text{dans } E}{+} b) = \lambda.a \underset{\text{dans } E}{+} \lambda.b,$$
$$(\lambda \underset{\text{dans } \mathbb{R}}{+} \mu).a = \lambda.a \underset{\text{dans } E}{+} \mu.a,$$
$$\lambda.(\mu.a) = (\lambda \underset{\text{dans } \mathbb{R}}{\times} \mu).a.$$

Nota Bene : On peut créer des espaces vectoriels sur n'importe quel corps (pas nécessairement $\mathbb{R}$), par exemple $\mathbb{C}$...

Exemple: Voyons maintenant un exemple moins classique : L'espace des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}(I)$.

Il convient tout d'abord de déterminer ce que sont les vecteurs. Ici, ce sont bien évidemment les fonctions. Il faut se mettre dans la tête que f est un vecteur. Attention ! Il ne faut donc pas confondre f et $f(x)$. Il y a en effet deux niveaux de lecture. Par exemple, quand on écrit $f = g$, on est au niveau de l'espace vectoriel ; alors que si on écrit $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la même propriété au final mais avec une interprétation au niveau des réels... Et on comprend mieux pourquoi les années précédentes, ce psychorigide de prof de math s'acharnait en rouge dès que nous confondions les deux.

• On a donc un ensemble, celui des fonctions et il faut choisir une loi interne. On prend la loi + usuelle, à savoir que l'on définit $f + g$ comme étant la fonction qui à x associe $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Il s'agit clairement d'une loi interne. Il reste à vérifier les propriétés.

Pour la $i.$, il suffit de l'écrire au niveau des réels pour tout réel :

$$\begin{aligned}(f+g)+h=f+(g+h) \quad &\Leftrightarrow \quad ((f+g)+h)(x)=(f+(g+h))(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \quad (f+g)(x)+h(x)=f(x)+(g+h)(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \quad f(x)+g(x)+h(x)=f(x)+g(x)+h(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc l'associativité est vérifiée.

Pour la $ii.$, le neutre, on va bien sûr prendre la fonction nulle. le problème est qu'on ne peut pas raisonnablement la noter 0 si l'on ne veut pas la confondre avec le 0 des réels. Aussi, on la note $0_{\mathcal{C}(I)}$ (on trouve aussi parfois θ). Il s'agit de la fonction identiquement nulle.

Pour la $iii.$, le symétrique, on prend $-f$ et on a bien $f+(-f)=0_{\mathcal{C}(I)}$.

Pour la $iv.$, il suffit de voir que la loi $+$ est commutative sur les réels. On démontre donc cette propriétés au niveau des réels une fois de plus.

• Quid de la loi externe ? Il n'y a aucun problème ici. Il suffit, pour s'en persuader d'écrire les propriétés au niveau des réels.

Exercice 1. ♪

Si l'on reprend l'exemple précédent et que l'on pose comme loi interne la composition interne $\circ$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, déterminer quelles sont les propriétés non satisfaites et celles qui le sont.

Exercice 2. ♪

Dans les exemples d'espaces vectoriels suivants, il vous faut définir les vecteurs, la loi interne et la loi externe.

1) L'espace $\mathbb{R}^n$.
2) L'espace des polynômes à coefficients réels, noté $\mathbb{R}[X]$.
3) L'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4) L'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, noté $\mathbb{R}_n[X]$.
5) L'espace des suites réelles, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
6) L'espace des fonctions dérivables sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$, noté $\mathcal{D}(I)$.

Maintenant qu'on a une belle structure, on veut lui donner des petits. Que peut bien être un sous-espace vectoriel ?

On a bien dans l'idée qu'avec les exemples précédents, $\mathcal{D}(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$ puisque dérivable implique continue. Que faut-il à un petit d'un espace vectoriel pour devenir grand ? Il paraît évident qu'il ne doit pas être vide, qu'il doit être contenu dans l'espace de départ et qu'il doit avoir une certaine autonomie. Cette autonomie, c'est dire qu'il peut se débrouiller tout seul, i.e. qu'il est stable pour les deux lois qui lui sont imposées par l'espace de départ. C'est ce que l'on appelle la stabilité par la combinaison linéaire. On résume cela de la façon suivante :

Définition 9.2 *L'ensemble F est un **sous-espace vectoriel** de l'espace vectoriel E si :*

i. $F\subset E$,
ii. $F\neq\emptyset$,
iii. $\forall(a,b)\in F^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, *on a* $\lambda.a+\mu.b\in F$ *(stabilité pour les combinaisons linéaires).*

Exemple: Si l'on reprend l'exemple que l'on connaît bien de $\mathbb{R}^2$, quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Tout d'abord, il faut des sous-ensembles F de $\mathbb{R}^2$ non vides. En général, pour s'assurer de ça, on vérifie que le $0_{\mathbb{R}^2}$ (i.e. $(0;0)$) est dedans. En effet, si le neutre n'est pas dedans, alors la stabilité par combinaison linéaire n'est pas respectée (puisqu'en prenant $(\lambda,\mu)=(0,0)$, on a $0.a+0.b=0_{\mathbb{R}^2}$).

De plus, il faut que F soit stable par la combinaison linéaire, ce qui veut dire en particulier que si $a \in F$, alors $\lambda.a \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. autrement dit, si un vecteur non nul est dans F, tous les vecteurs qui ont même direction que a sont dedans. Ainsi, si on prend une droite vectorielle (i.e. la réunion de tous les vecteurs ayant pour support la droite), on obtient un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Si maintenant, on prend deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires a et b dans F, alors on se rend vite compte que tout vecteur du plan c peut s'écrire comme la somme de deux vecteurs $\lambda.a$ et $\mu.b$. En effet, si l'on considère le repère donné par les deux vecteurs a et b, les coordonnées de c dans ce repère sont (λ, μ), ce qui signifie bien que $c = \lambda.u + \mu.b$.

Pour résumé, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont : les droites vectorielles (passant par l'origine), l'ensemble réduit au neutre $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et l'espace tout entier $\mathbb{R}^2$.

On remarque par cet exemple qu'une structure d'espace vectorielle est très pauvre par rapport à ce que l'on sait faire dans le plan. Pas de cercle, pas de droite qui ne passe pas par l'origine, pas de structure affine du tout. Pas la peine d'en avoir peur non plus. C'est un peu comme si on travaillait depuis des années avec les fonctions affines et puis qu'on vous dise que l'on se limite aux fonctions linéaires.

Exercice 3. ♪

Reprendre l'exercice 2 et déterminer qui est sous-espace vectoriel de quoi ?

Exercice 4. ♩

Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1) $F_1 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_n \longrightarrow 0\}$,

2) $F_2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ est croissante }\}$,

3) $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P \text{ est impair }\}$,

4) $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg P = 2\}$,

5) $F_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = a \sin x + b \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$,

Exercice 5. ♩

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on note

$$F + G = \{a + b,\ \text{avec } (a,b) \in F \times G\}.$$

1) Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

2) Montrer qu'il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

L'air de rien, ceci est très important car cela veut dire, que non seulement, on a une loi interne + au niveau des vecteurs, mais aussi une loi + induite au niveau des sous-espaces vectoriels...

Exercice 6. ♩

Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un espace vectoriel de E.

Exercice 7. ♩

Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.

Exercice 8. ♪

A quelle condition le complémentaire d'un sous-espace vectoriel est-il un sous-espace vectoriel ?

Dans un sous-espace vectoriel, on peut s'intéresser à la structure des petits (les sous-espaces vectoriels). Par exemple, si on se donne un sous-espace vectoriel F de E, est-ce que F est gros par rapport à E. Ce problème sera facilement traité via la théorie des dimensions (plus loin). Mais plus intéressant pour nous maintenant, on peut se poser la question du jumeau !

En effet, est-ce que je peux trouver un sous-espace vectoriel G de E tel que F et G soient jumeaux, dans le sens ou leur somme donne E ?

Définition 9.3 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que F et G sont* ***supplémentaires*** *si :*

i. $F \cap G = \{0_E\}$,

ii. $F + G = E$.

On dit alors que F et G sont en somme directe et on note $E = F \oplus G$.

Exemple: Une droite et un plan dans $\mathbb{R}^3$ qui ne contient pas la droite.

Exercice 9. ♩

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que $F = \{(x, y) \in E,\ x = y\}$ et $G = \{(x, y) \in E,\ x + y = 0\}$ sont supplémentaires.

2) Montrer que si $H = \{(x, y) \in E,\ x + 2y = 0\}$, alors F et H sont supplémentaires.

Exercice 10.

Un exemple ultra-classique : Montrer que l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$ est somme directe du sous-espace des fonctions impaires et du sous-espaces des fonctions paires.

Remarque: On remarque donc qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire ! Alors que le complémentaire, lui, est unique. D'un côté, il y a une notion vectorielle et de l'autre, une notion ensembliste. Un professeur de mathématiques que j'adore (merci Bernard) m'a dit un jour un moyen mnémotechnique pour retenir ce fait : *"Un SU le COM."* (i.e. UN supplémentaire, LE complémentaire). Si on a l'esprit suffisamment mal tourné, on le retient très facilement.

Exercice 11. ♩

On pose

$$\begin{aligned}
F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -y\} \\
G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 0\} \\
H &= \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Montrer que $F = G \oplus H$.

II Variétés affines

Un petit paragraphe en marge du problème traité ici.

Les variétés affines se rapprochent un peu plus de l'image qu'on a du plan réel usuel. En effet, dans une variété affine, on n'impose plus que l'ensemble contienne le neutre . Quand on translate un sous-espace vectoriel, on obtient une variété affine.

Définition 9.4 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle* **variété affine** *G de direction F, l'image de F par une translation de vecteur a fixé.*

$$G = \{a + u,\ u \in F\}.$$

Exemple: La droite d'équation $x + y = 1$ est une variété affine de $\mathbb{R}^2$ de direction $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0\}$.

Exercice 12. ♩

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

1) On pose $A = \{p \in E,\ p(1) = p(-1) = 2\}$. Montrer qu'il s'agit d'un variété affine.

2) On pose $B = \{p \in E,\ p(0) \neq 0\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel ? Est-ce une variété affine ?

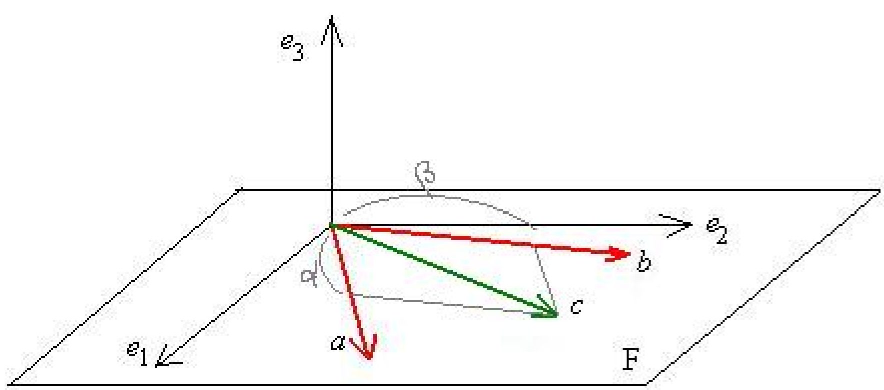
III Famille de vecteurs

Quand on étudie un sous-espace vectoriel, on se pose vite la question des vecteurs générateurs. En effet, dans notre exemple de $\mathbb{R}^2$, prenons un sous-espace vectoriel qui est une droite vectorielle. On comprend bien qu'un seul vecteur non nul suffit pour décrire toute la droite. Il suffira de le multiplier par tous les réels pour obtenir tous les éléments de la droite vectorielle. On peut en prendre deux ou quarante, mais ça ne sert à rien. Dans ce cas, un seul suffit.

Si on se place dans $\mathbb{R}^3$ et que l'on considère un plan vectoriel, mettons F, le plan engendré par les deux vecteurs e_1 et e_2 (on peut aussi le décrire comme l'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = 0$).
Si l'on prend a et b deux vecteurs de F, comment sur la figure qui suit, on voit bien que cela suffit à "attraper" tous les vecteurs de F par combinaison linéaire. En fait, si $c \in F$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c = \alpha.a + \beta.b$. Dans ce cas, (α, β) sont les coordonnées de c dans le repère de F associé à (a, b).

Dans ces conditions, ajouter un troisième vecteur serait superflu. On comprend alors que deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suffisent à décrire F.

Mais il y a une subtilité. Le problème de la dépendance. Imaginons que nous voulions décrire F avec deux vecteurs, on pourrait choisir a et $2.a$. Mais cela ne fonctionnerait pas. On voit clairement que les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs $\alpha.a + 2\beta.a$ correspondent aux combinaisons d'un seul vecteur (les $\gamma.a$ avec $\gamma = \alpha + 2\beta$ qui parcourt $\mathbb{R}$). Il est ainsi impossible de trouver (α, β) tel que $\alpha.a + 2\beta.a = b$ par exemple. Le vecteur b n'est pas membre de la droite vectorielle décrite par a. On dit alors que a et $2.a$ sont liés (ou pas libres).



Définition 9.5 *On pose $I = [\![1, n]\!]$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.*

• *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite* ***famille génératrice*** *de F, un sous-espace vectoriel de E si et seulement si tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire des u_i.*

• *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite* ***famille libre*** *de E si et seulement si :*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = 0\ \forall i \in I.$$

Si un seul des λ_i est non nul, on dit que la ***famille est liée****.*

• *On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une* ***base*** *de E s'il s'agit d'une famille génératrice et libre de E. Dans ce cas, toutes les bases ont le même nombre d'éléments, ce nombre d'éléments d'une base est appelé la* ***dimension*** *de E. On la note $\dim E$.*

Remarques: • Pour la famille libre, il faut comprendre que la seule façon d'obtenir 0_E est la combinaison linéaire triviale (i.e. tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls).
• On étend facilement cette définition au cas des espaces vectoriels de dimension infinie en prenant une famille au départ dont l'ensemble d'indexation I est seulement dénombrable.

Exercice 13. ♪

Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer que $a = (1, 2, -5)$, $b = (-2, 5, -1)$ et $c = (8, -11, -7)$ sont liés.

On peut voir que la notion de liaison n'est pas aussi simple que dans l'exemple du préambule. On peut avoir trois vecteurs liés sans qu'aucun ne soit un multiple des deux autres.

La notion de base est fondamentale. Une particularité est donnée par la

Proposition 9.6 *Si E est un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$ et si $u \in E$, alors il existe un unique n-uplet de réels $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que*

$$u = \alpha_1.e_1 + ... + \alpha_n.e_n.$$

Ce n-uplet s'appelle les ***coordonnées*** *de u dans la base $(e_1, ..., e_n)$.*

Démonstration:

Existence : Elle provient du fait que $(e_1, ..., e_n)$ est une base. En effet, la famille $(u, e_1, ..., e_n)$ est liée car de cardinal $n + 1$ dans un espace de dimension n. Doc il existe une combinaison linéaire non triviale (i.e. les coefficients sont non tous nuls) :

$$\lambda.u + \lambda_1.e_1 + ... + \lambda_n.e_n = 0_E.$$

On est sûr que $\lambda \neq 0$. En effet, dans le cas contraire, on aurait trouvé une combinaison linéaire non triviale mettant en scène les éléments de la base, ce ne se peut pas. On a donc

$$u = \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\alpha_1} e_1 + ... + \underbrace{\frac{\lambda_n}{\lambda}}_{\alpha_n} e_n.$$

Unicité : Imaginons qu'il existe deux systèmes de coordonnées, $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $(\beta_1, ..., \beta_n)$. On a alors :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=0}^{n} \beta_i e_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i) e_i = 0_E.$$

et là encore, le fait que $(e_1, ..., e_n)$ est une base assure que la dernière combinaison linéaire est triviale. Donc $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

□

Définition 9.7 *Pour tout espace vectoriel, il existe une base que les mathématiciens aiment bien : la* ***base canonique***[a]*. Il s'agit de la base la plus simple qui soit : $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ... et $e_n = (0, ..., 0, 1)$.*

a. D'après le petit Robert : qui est conforme aux *canons* (lois ecclésiastiques), orthodoxe ; et, par extension, régulier puis simple

Exemple: Dans le cas de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ par exemple, on a tendance a considérer comme base canonique $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$ et $e_4 = X^3$.

Il y a essentiellement trois façons de définir un espace vectoriel. On peut :

Fournir une famille de vecteurs générateurs.

C'est la situation la plus sympathique.
Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^3$, on donne $a = (1, 2, 3)$ et $b = (-1, 0, 2)$ et on considère

$$F = \{\alpha.a + \beta.b, \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Il s'agit alors du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant ces vecteurs. On note souvent $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ (ou plus simplement -mais plus rarement- $< a, b >$).

On peut aussi fournir des conditions sur les coordonnées.

En fait,il s'agit de la même situation que précédemment à peu de chose près.
Comme dans cet exemple sur $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \{(2x - y + 3z, x + y, 3x - z),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Il est alors très facile de trouver des vecteurs générateurs. Il suffit de "séparer les variables" :

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ x + y \\ 3x - z \end{pmatrix} = x.\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{a} + y.\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} + z.\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{c}$$

Les vecteurs a, b et c sont alors des vecteurs générateurs de F.

Fournir des équations de liaison.

C'est la situation la moins bonne.
Si l'on suit l'exemple, dans $E = \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E,\ x - y + z + t = 0, 3x - y = 0, x - t = 0\}.$$

Il faut "réduire" le système en "brûlant" un minimum de variables. En clair, on doit se servir des équations pour exprimer toutes les variables (ici, x, y, z, t) en fonction d'un minimum d'entre elles. Par exemple, on peut "brûler" t en exprimant x en fonction de t dans la dernière équation. On utilise alors la substitution dans toutes les autres pour faire disparaître x. Et on recommence, comme expliqué ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{ll} x - y + z + t & = 0 \\ 3x - y & = 0 \\ x - t & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x - y + z + t & = 0 \\ 3x - y & = 0 \\ x & = t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} t - y + z + t & = 0 \\ 3t - y & = 0 \\ x & = t \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -y + z & = -2t \\ y & = 3t \\ x & = t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z & = t \\ y & = 3t \\ x & = t \end{array}\right.$$

Ainsi, on peut écrire que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé un seul vecteur générateur, le vecteur $(1, 3, 1, 1)$.

Remarque: Une rapide lecture nous laisse croire que le sous-espace F est inclus dans l'espace E de dimension 4 et qu'il est défini par 3 équations de liaison. Or il est avéré que $4 - 3 = 1$.

Cela paraît assez logique quand on y pense. Au départ, quand on ne se donne pas de relation sur les quatre variables, on a bien un sous espace de dimension 4. Si l'on se donne une équation, on fait dépendre une des variables des trois autres, à savoir que le choix de valeurs pour ces trois variables implique une valeur pour la quatrième qui n'est plus vraiment libre car dépendante des autres. D'où $4 - 1 = 3$ un sous-espace de dimension 3. On recommence avec une deuxième, puis une troisième équation et on voit que l'on perd autant de variables "libres" que d'équations.

Mais le monde des espaces vectoriels est loin de Disneyland et la situation peut être plus catastrophique. En effet, on imagine bien qu'il se passe quelque chose car si on se donne 17 équations de liaison sur un espace de dimension 4, on n'obtient pas un espace de dimension $4 - 17 = -13$?!
Voyons cela avec l'exemple suivant :
On cherche des vecteurs générateurs de

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x-y=0,2x-y+4z+t=0,x-2y-4z-t=0\}.$$

On résout le système, la première équation invitant à brûler y (ou x, aucune importance) :

$$\left\{\begin{aligned} x-y\qquad &=0\\ 2x-y+4z+t&=0\\ x-2y-4z-t&=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x\qquad\quad &=y\\ 2x-y+4z+t&=0\\ x-2y-4z-t&=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x\qquad\quad &=y\\ 2y-y+4z+t&=0\\ y-2y-4z-t&=0\end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x\qquad &=y\\ y+4z+t\ &=0\\ -y-4z-t&=0.\end{aligned}\right.$$

Et là, c'est le coup du Picsou ! Les deux dernières équations sont équivalentes. On en perd une car elles sont **liées**. On continue donc avec seulement deux équations et on est obligé de brûler une seconde variable, t par exemple :

$$\left\{\begin{aligned} x-y\qquad &=0\\ 2x-y+4z+t&=0\\ x-2y-4z-t&=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x\qquad &=y\\ y+4z+t&=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x\ &=y\\ t\ &=-y-4z.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, on peut décomposer :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in F \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\\z\\-y-4z\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=y.\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+z.\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-4\end{pmatrix}$$

D'où deux vecteurs générateurs : $(1,1,0,-1)$ et $(0,0,1,-4)$.

Exercice 14. ♪

On donne dans $E=\mathbb{R}^3$, les vecteurs $a=(1,1,1)$ et $b=(1,2,3)$. On s'intéresse à $F=\text{Vect}(a,b)$. Exprimer le sous-espace vectoriel F à l'aide de conditions sur les coordonnées, puis à l'aide d'équations de liaison.

Lorsqu'on aborde un espace vectoriel pour la première fois, ce qui est déroutant est que l'on a pas de représentation de l'objet. Il est donc très important de se rattacher à se que l'on sait sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et d'extrapoler. Le tableau ci-dessous aide à faire cette démarche sur trois exemples : l'espace $\mathbb{R}^n$ classique, l'espace des suites, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l'espace des fonction sur $\mathbb{R}$ noté $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Espaces vectoriels E	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
Vecteurs	$v=(\alpha_1,...,\alpha_n)$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
Coordonnées	les α_i pour i de 1 à n	les u_n, $\forall n\in\mathbb{N}$	les $f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$
Dimension de l'espace	Finie : n	Infinie (dénombrable)	Infinie (indénombrable)
Equations au niveau des vecteurs	$v=w$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$f=g$
Les mêmes au niveau des coordonnées	$\alpha_i=\beta_i$, pour i de 1 à n	$u_n=v_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$	$f(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Une petite subtilité concernant les bases.

Une base d'un espace vectoriel est donc un système libre et générateur. Mais il est souvent bien lourd de démontrer les deux propriétés. En effet, On peut bien souvent limiter nos efforts en utilisant l'unicité du nombre d'éléments d'une base.

Ainsi, une base est :

- Une **famille libre et maximale**,
- ou encore une **famille génératrice et minimale**.

C'est l'histoire de la bouteille que l'on veut remplir : Imaginez que vous ayez à chercher une base d'un sous-espace vectoriel. Vous allez remplir la bouteille vide avec ladite base. deux façons de faire :

• Soit vous prenez un vecteur non nul (c'est mieux pour engendrer quoi que ce soit), vous le mettez dans la bouteille, vous en prenez un autre, vous vérifiez qu'il n'est pas lié au précédent et vous le mettez dedans et ainsi de suite en vérifiant à chaque fois que celui que vous rajoutez est libre avec ceux qui sont déjà dans la bouteille. Quand vous ne pouvez plus rien rajouter, vous avez bien une famille libre et maximale (dans le sens on où ne peut plus en mettre).
• Soit vous arrivez avec un seau de vecteurs dont vous savez qu'il est générateur (dans le cas d'un sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs par exemple). Vous le vider dans la bouteille et ce qui déborde part à la poubelle. En fait, vous éliminez un à un tous ceux qui s'expriment en fonction des autres et vous vous arrêtez quand vous êtes certains qu'il en reste assez (dans ce cas-là, il est pratique de connaître à l'avance la dimension du sous-espace sur lequel on travaille).

Exemples: • Dans l'exemple précédent, $F = \{(x, y, z, t) \in E,\ x - y + z + t = 0, 3x - y = 0, x - t = 0\}$, on a trouvé un système générateur donné par le vecteur $a = (1, 3, 1, 0)$. Il est évident qu'il est minimal car tout seul. L'enlever reviendrait à dire que le sous-espace F est vide, ce qui n'est pas. Donc, ce vecteur est, à lui tout seul, une base de F.

• Si l'on considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ décrit par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\}$. On trouve facilement que $a = (2, 0, 1)$ et $b = (0, 2, 1)$ sont des éléments de F et qu'ils sont libres. Ainsi, $\dim F \geq 2$. Mais si on réfléchit deux secondes de plus, on voit que le vecteur $(1, 0, 0)$ n'est pas dans F. On en conclut alors que $F \subsetneq E$. Et comme $\dim E = 3$, on a $\dim F < 3$. Donc on n'a pas le choix, $\dim F = 2$ et (a, b) est une base de F comme famille libre maximale.

Proposition 9.8 *(Formule de Grassman) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. On a alors*

$$\boxed{\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)}$$

Démonstration: Exercice.

Exercice 15. ♪
En déduire que si $\dim F + \dim G = \dim E$ et si $F \cap G = \{0\}$, alors $F \oplus G = E$.

IV Applications linéaires

Nous sommes maintenant des professionnels des espaces vectoriels et de leurs sous-espaces. Se pose alors assez vite (comme toujours en mathématiques) le problème du transport de structure : Si je sais faire des choses sur un ensemble E muni d'une jolie structure, est-ce que je peux transporter cette structure sur un ensemble F via une "flèche" ?
Encore faut-il bien choisir la flèche. Pour ce qui nous concerne, il faut que la flèche (on dira l'homomorphisme) soit compatible avec les deux lois (l'interne et l'externe). ce qui donne la

Définition 9.9 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Une* ***application linéaire*** *(ou* ***homomorphisme****) de E vers F est une application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :*

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u, v) \in E^2, \quad f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Un peu de vocabulaire :
- Un homomorphisme injectif est un **monomorphisme**,
- Un homomorphisme surjectif est un **épimorphisme**,
- Un homomorphisme bijectif est un **isomorphisme**.

Seul le dernier est véritablement utilisé, les autres permettent de briller en société. Plus courant est la

Définition 9.10 *Dans le cas particulier où f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$, on dit que f est une **forme linéaire**.*

Exemple: Montrons que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, y) \end{array}$ est un endomorphisme.
Il faut démontrer tout d'abord qu'il s'agit bien d'un "endo". Ce n'est pas le plus difficile en général : On part de $\mathbb{R}^3$ et on arrive bien dans $\mathbb{R}^3$ car $(x+y, y+z, y) \in \mathbb{R}^3$.
Ensuite, il faut voir qu'il s'agit bien d'une application linéaire :
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$, il nous faut montrer que $f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v)$.
On pose $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$. On a alors comme préliminaire :

$$\lambda.u + \mu.v = (\underbrace{\lambda x + \mu x'}_{X}, \underbrace{\lambda y + \mu y'}_{Y}, \underbrace{\lambda z + \mu z'}_{Z})$$

On croise les doigts et on calcule alors $f(X,Y,Z)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda.u + \mu.v) &= f(X,Y,Z) = (X+Y, Y+Z, Y) \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda(x+y) + \mu(x'+y'), \lambda(y+z) + \mu(y'+z'), \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda.\underbrace{(x+y, y+z, y)}_{f(u)} + \mu.\underbrace{(x'+y', y'+z', y')}_{f(v)} \\ &= \lambda.f(u) + \mu.f(v). \end{aligned}$$

Lemme 9.11 *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $f(0_E) = 0_F$.*

Démonstration: Via la propriété de stabilité par la combinaison linéaire en prenant $\lambda = \mu = 0$, on a :

$$f(0_E) = f(0.u + 0.v) = 0.f(u) + 0.f(v) = 0_F.$$

□

Proposition 9.12 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
- Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si B est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.
(où f^{-1} désigne l'application réciproque de f.)

Démonstration:
Pour $f(A)$, on a trois conditions à vérifier (souvenez-vous !) :
• On a $f(A) \subset F$ par nature de f.
• Et il suffit d'exhiber un élément de $f(A)$ pour prouver qu'il est non vide. Par exemple 0_F d'après le lemme précédent. En effet, il est dans $f(A)$ comme image de $f(0_E)$.
• Ensuite, il faut vérifier que $f(A)$ est stable pour la combinaison linéaire. Soient a et b dans $f(A)$, il faut montrer que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda.a + \mu.b \in f(A)$. Pour déterminer si un vecteur c est dans $f(A)$, il faut lui trouver un antécédent, autrement dit, un vecteur de E tel que son image soit c. Or si $a \in f(A)$ et $b \in f(A)$, alors il existe u et v dans A tels que $f(u) = a$ et $f(v) = b$. Et comme u et v sont dans A, on a, par la stabilité de la combinaison linéaire sur A, le vecteur $\lambda.u + \mu.v \in A$. On utilise maintenant le fait que f est linéaire pour écrire :

$$f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v) = \lambda.a + \mu.b.$$

Ainsi, $\lambda.u + \mu.v$ est bien dans $f(A)$.
Pour $f^{-1}(B)$, idem :
• On a bien $f^{-1}(B) \subset E$ par construction. En effet, on rappelle que

$$f^{-1}(B) = \{u \in E,\ f(u \in B\}.$$

• L'ensemble $f^{-1}(B)$ est non vide d'après ce qui précède car on sait qu'il contient 0_F en tant que sous-espace vectoriel de f et que $f(0_E) = 0_F$. Donc $0_E \in f^{-1}(B)$.

• Cet ensemble est-il stable pour la combinaison linéaire ?

Soient u et v dans $f^{-1}(B)$, on veut montrer que $\lambda.u+\mu.v \in f^{-1}(B)$. Par définition, on a $f(u)$ et $f(v)$ dans B. Donc, par stabilité du sous-espace vectoriel B, on a pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$), le vecteur $c = \lambda.f(u)+\mu.f(v) \in B$. Or, par la propriété de l'application linéaire, $c = f(\lambda.u + \mu.v)$. On a donc trouvé un vecteur $c \in B$ tel que $w = \lambda.u + \mu.v$ est un antécédent de c. Donc $\lambda.u + \mu.v \in f^{-1}(B)$.

□

Définition 9.13 *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors*

*$Ker f = \{a \in E,\ f(a) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$ s'appelle le **noyau** de f. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E.*

*$Im f = \{f(a) \in F,\ a \in E\} = f(E)$ s'appelle **l'image** de f. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de F. On appelle **rang** de f la dimension de l'image de f et on note $\dim Im f = rg f$.*

L'exemple suivant est fondamental car demandé en permanence en devoir. Il faut être capable de le réciter par cœur et surtout de très bien comprendre l'argument concernant le calcul de l'image.

Exemple: Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x-y, y) \end{array}$

.

• Pour le noyau, il suffit d'écrire que l'on cherche les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0).$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

• Pour l'image, on pourrait calculer toutes les images de tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ comme nous y invite la proposition, mais il y a beaucoup plus économe : En effet, un vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit par définition $u = xe_1 + ye_2$ où (e_1, e_2) est la base canonique et (x,y) sont les coordonnées dans cette base. Mais alors $f(u) = xf(e_1) + yf(e_2)$ via la linéarité de f. Et $f(u)$ est par définition dans $\operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ qui est ainsi égal à $\operatorname{Im} f$.

Ici, $Imf = \operatorname{Vect}(f(1,0), f(0,1)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

D'après un calcul analogue à l'exemple précédent, on a le lemme bien pratique :

Lemme 9.14 *Si f est une application linéaire de E dans F et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors*

$$Im f = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

D'autre part, on a des conséquences directes des définitions des noyau et image d'une application linéaire :

Théorème 9.15 *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors*

f est injective si et seulement si $Ker f = \{0_E\}$,
f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Démonstration: La surjectivité ne pose pas de problème car il s'agit de la même que pour une application classique. Le résultat est ensembliste et n'apporte pas grand chose.
Pour l'injectivité, la démonstration est, au contraire, très formatrice :
On a déjà montré que $f(0_E) = 0_F$, ce qui assure que $\mathrm{Ker}\, f$ n'est pas vide.
C.N. : Dire que f est injective, si on se souvient du cours sur les applications, c'est dire que pour tout $(u, v) \in E$, si $f(u) = f(v)$, alors $u = v$. Soit $w \in \mathrm{Ker}\, f$, alors on a $f(w) = 0_F = f(0_E)$, et par injectivité, $w = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
C.S. : Imaginons maintenant que $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. On suppose que $f(u) = f(v)$. Par linéarité, on a $f(u-v) = 0_F$. Donc $u - v \in \ker f$ et $u - v = 0_E$. Ainsi, $u = v$.

□

S'il est assez facile de déterminer l'injectivité de f, via ce théorème, il est en revanche souvent bien plus délicat de statuer sur la surjectivité. Le lemme précédent est plus efficace.

Théorème 9.16 *(Théorème du rang) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, on a*

$$\boxed{\dim \mathit{Ker}\, f + \dim \mathit{Im}\, f = \dim E}$$

Remarques: • Il s'agit là DU théorème fondamental de ce chapitre. Grâce à celui-ci, en le combinant à la remarque sur les bases (libres maximales ou générateurs minimales), on peut résoudre quantité de problèmes.
• On note parfois $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\, f$, la dimension de l'image s'appelant le **rang** de l'application linéaire. Ceci vient de la vision matricielle des choses (voir chapitre sur les matrices).

Si l'on reprend l'exemple précédent, on a calculé le noyau très simplement et on a trouvé un noyau trivial, donc l'application linéaire est injective. Le théorème du rang stipule que

$$\dim \mathbb{R}^2 = \underbrace{\dim\{0_{\mathbb{R}^2}\}}_{0} + \mathrm{rg}\, f \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \mathrm{rg}\, f.$$

ce qui est en accord avec ce que l'on avait trouvé.

Exercice 16. ♩

Bien souvent, on demande de démontrer que l'image d'un endomorphisme et son noyau sont supplémentaires. En effet, le théorème du rang stipule que cela fait de bons candidats du point de vue des dimensions. Il serait faux de croire que c'est toujours le cas. Construire un contre-exemple trivial sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17. ♩ *(Annales Bordeaux IV)*

Soient $u_1 = (1, 2, 3, -1)$, $u_2 = (2, 1, 5, -1)$, $u_3 = (0, 3, 1, -1)$ et $u_4 = (3, -2, 2, 2)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soit $H = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

1) Déterminer une base de H.

2) Soit $\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z, t) & \longmapsto & 12x - 2y - 7z - 13t \end{array}$.
Montrer que f est une forme linéaire.

3) La forme f est-elle surjective ?

4) Montrer que $H \subset \mathrm{Ker}\, f$ et en déduire par un raisonnement simple sur les dimensions que $H = \mathrm{Ker}\, f$.

5) Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par $v_1 = (1, 1, -1, 1)$ et $v_2 = (1, 0, 1, 1)$. Montrer que $P \cap H$ est une droite dont on donnera un vecteur directeur.

Exercice 18. ♩ *(Plus dur)*

Soit $\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & p & \longmapsto & q \end{array}$ telle que $q(X) = p(X) + (X-1)p'(X)$.

Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ et en donner une base.

Exercice 19. 𝅗𝅥 *L'exercice qui tue.*

Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires entre deux espaces vectoriels E et F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.