Matrices

Leçon 10
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Nous décrivons ici les bases du calcul matriciel sans entrer dans les détails, on s'attache avant tout à comprendre les objets avant d'aller plus avant dans la théorie dans les chapitres qui suivent.

Table des matières

I Les applications linéaires revisitées

Dans toute la suite, l'espace de départ est E, un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$ et l'espace d'arrivée est un espace vectoriel F de dimension $p \geq 1$ muni d'une base $(f_1, ...f_p)$.

On se donne aussi $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

On sait déjà que pour tout $u \in E$, il existe un unique n-uplet $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i.e_i$ (les coordonnées de u dans la base $(e_1, ..., e_n)$ de E.
Du fait de la linéarité de φ, on a

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u_i.e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i.\varphi(e_i).$$

On comprend alors que φ est entièrement déterminée par l'image de la base $(e_1, ..., e_n)$. En effet, si l'on connaît $\varphi(e_i)$ pour tout i, on aura $\varphi(u)$.

Mais $\varphi(e_i) \in F$, donc il existe pour chaque i, un unique p-uplet $(a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{pi}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\varphi(e_i) = a_{1i}.f_1 + a_{2i}.f_2 + ... + a_{pi}.f_p = \sum_{j=1}^{p} a_{ji}.f_j.$$

En injectant dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \sum_{i=1}^{n} u_i.\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(u_i.\sum_{j=1}^{p} a_{ji}.f_j\right)\\
&= u_1.(a_{11}.f_1 + a_{21}.f_2 + ... + a_{p1}.f_p) + ... + u_n.(a_{1n}.f_1 + a_{2n}.f_2 + ... + a_{pn}.f_p)\\
&= (u_1a_{11} + u_2a_{12} + ... + u_na_{1n}).f_1 + ... + (u_1a_{p1} + u_2a_{p2} + ... + u_na_{pn}).f_p\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} u_ia_{1i}\right).f_1 + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} u_ia_{pi}\right).f_p
\end{aligned}$$

On n'a pas l'impression d'y avoir gagné grand chose sur le plan de la lisibilité... Tout juste peut-on dire que les coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base $(f_1, ..., f_p)$ sont :

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} u_1a_{11} + u_2a_{12} + ... + u_na_{1n}\\ u_1a_{21} + u_2a_{22} + ... + u_na_{2n}\\ ...\\ u_1a_{p1} + u_2a_{p2} + ... + u_na_{pn}\end{pmatrix}$$

Mais en fait, le gain est énorme. En effet, on comprend que connaître φ, c'est connaître l'image de la base $(e_1, ..., e_n)$ dans la base $(f_1, ..., f_p)$, autrement dit, il nous suffit de connaître le tableau à p lignes et n colonnes suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn}\end{pmatrix}$$

C'est ce que l'on appelle la **matrice** de f de la base $(e_i)_{i=1}^{n}$ dans la base $(f_j)_{j=1}^{p}$. On la note souvent par souci d'économie $(a_{ij})_{i,j}$ avec i qui correspond à la ligne et j à la colonne. On écrit alors $\mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)}(\varphi)$

s'il ne fallait retenir qu'un seul morceau de ce cours ce serait ceci :

$$\mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn}\end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1\\ \\ \vdots\\ \\ f_p\end{array}\end{array}$$

Ce qui signifie que la i^e colonne donne les composantes de $f(e_i)$ dans la base $(f_1, ..., f_p)$.

On appelle $\mathcal{M}_{p\times n}$ l'ensemble des matrices p lignes et n colonnes.

Remarque: Si $p = 1$, on parle de **matrice ligne** et si $n = 1$, on parle de **matrice colonne** (ou de vecteur tout simplement).

Exemple: On choisit de mettre en application ce qui vient d'être écrit avec l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x', y') = (y + z, x + y + z)\end{array}$$

On pose (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Par calcul, on a $\varphi(e_1) = \varphi(1, 0, 0) = (0, 1)$, $\varphi(e_2) = \varphi(0, 1, 0) = (1, 1)$ et $\varphi(e_3) = \varphi(0, 0, 1) = (1, 1)$. D'où

$$\mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Ainsi, en supposant que l'on fixe une base $(e_1, ..., e_n)$ sur E et une base $(f_1, ..., f_p)$ sur F,on a crée une "flèche" :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \stackrel{\text{Mat}}{\longrightarrow} & \mathcal{M}_{p\times n} \\ \varphi & \longmapsto & \text{Mat}_{(e_i),(f_j)}(\varphi). \end{array}}$$

Exercice 1. ♩

Déterminer la matrice associée aux bases canoniques pour chacune des applications linéaires suivantes :

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+3y, 2y, y-x) \end{array}$

2) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-t, t-x) \end{array}$

3) $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ p & \longmapsto & q \end{array}$ tel que $q(X) = p(X+1)$

4) $\dfrac{\partial}{\partial X}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ p & \longmapsto & p' \end{array}$

II Opérations sur les matrices - où elles prennent de la dimension.

Jusqu'à présent, les matrices ne servent qu'à écrire d'une autre façon (plus compliquée) les applications linéaires. C'est joli. On fait de jolis tableaux, mais : "A quoi ça sert ?" (comme le dit régulièrement le disciple).

Il est temps de jouer un peu avec ces matrices avant que le disciple ne s'assoupisse :
Si E et F sont des espaces vectoriels de dimensions respectives n et p (comme précédemment), et si f et g sont deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$. On note $A = (a_{ij}) = \text{Mat}_{(e_i),(f_j)}(f)$ et $B = (b_{ij}) = \text{Mat}_{(e_i),(f_j)}(g)$.

• On peut essayer un peu n'importe quoi avec ces matrices, mais les idées les plus simples sont parfois les meilleures. Si on fait une "addition" basique :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{p1} & b_{p2} & ... & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1}+b_{p2} & a_{p2}+b_{p2} & ... & a_{pn}+b_{pn} \end{pmatrix}$$

ce que l'on noterait plus simplement : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Le plus fort, c'est que cette matrice est associée à ..... $f + g$!!
En effet, comme on peut le lire sur les colonnes de la matrice, si l'on appelle h l'application linéaire associée à la matrice $A + B$, l'image de e_i dans la base $(f_1, ..., f_p)$ est :

$$\begin{aligned} h(e_i) &= (a_{1i}+b_{1i}).f_1 + (a_{2i}+b_{2i}).f_2 + ... + (a_{pi}+b_{pi}).f_p \\ &= \underbrace{(a_{1i}.f_1 + a_{2i}.f_2 + ... + a_{pi}.f_p)}_{f(e_i)} + \underbrace{(b_{1i}.f_1 + b_{2i}.f_2 + ... + b_{pi}.f_p)}_{g(e_i)}. \end{aligned}$$

Donc on a une façon très élémentaire de décrire la somme de deux applications linéaires via les matrices.

$$\boxed{\text{Mat}(f) + \text{Mat}(g) = \text{Mat}(f+g)}$$

• De la même façon, on doit pouvoir multiplier une matrice par un réel λ. On a envie de faire :

$$\lambda. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\times a_{11} & \lambda\times a_{12} & ... & \lambda\times a_{1n} \\ \lambda\times a_{21} & \lambda\times a_{22} & ... & \lambda\times a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda\times a_{p1} & \lambda\times a_{p2} & ... & \lambda\times a_{pn} \end{pmatrix}$$

De la même façon que précédemment, en notant h l'application linéaire associée à la matrice $\lambda.A$, on trouve

$$\begin{aligned} h(e_i) &= (\lambda \times a_{1i}).f_1 + (\lambda \times a_{2i}).f_2 + ... + (\lambda \times a_{pi}).f_p \\ &= \lambda.\underbrace{(a_{1i}.f_1 + a_{2i}.f_2 + ... + a_{pi}.f_p)}_{f(e_i)}. \end{aligned}$$

On a donc, là encore, une façon très élémentaire de décrire la multiplication d'une application linéaire par un réel :

$$\boxed{\lambda.\operatorname{Mat}(f) = \operatorname{Mat}(\lambda f)}$$

<u>La conclusion qui tue :</u> L'ensemble $\mathcal{M}_{p\times n}$ est donc aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$!!! En fait, on a déjà montré dans la leçon sur les espaces vectoriels (*conf.* l'exercice qui tue) que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a crée ici une flèche appelée Mat :

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{Mat} : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{pn} \\ & \varphi & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{(e_i),(f_j)}(\varphi) \end{array}$$

On se rend compte que cette flèche est en fait un isomorphisme qui transporte la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{pn}$.

De plus, cet espace vectoriel $\mathcal{M}_{p\times n}$ est de dimension $n \times p$ et les **matrices élémentaires** suivantes forment une base de cet espace vectoriel.

$$\begin{array}{ccc} & \text{colonne } j & \\ & \downarrow & \\ E_{i,j} = & \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \end{array} \end{array}$$

III Le produit matriciel - où les matrices prennent de la valeur

III.1 Image d'un vecteur via une matrice

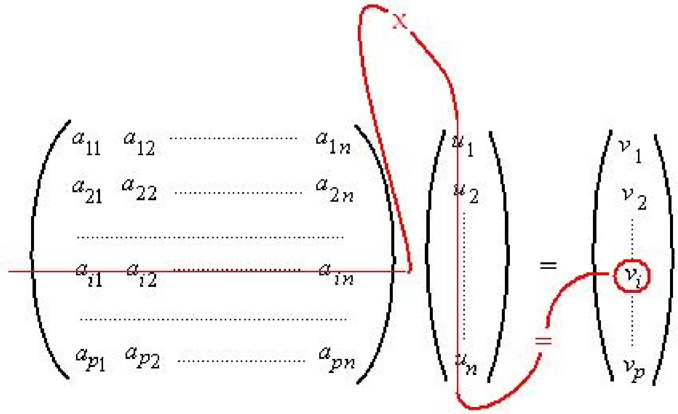
On reprend la même idée que précédemment avec notre application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et les mêmes bases $(e_1, \dots, e_n)$ pour E et $(f_1, \dots, f_n)$ pour F. On note encore $A = (a_{ij}) = \operatorname{Mat}_{(e_i)(f_j)}(\varphi)$ la matrice associée . On sait que la i^e colonne correspond à l'image de e_i par φ. On a vu que si $u = (u_1, \dots, u_n)$ est un vecteur de E, alors

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \sum_{i=1}^{n} u_i.\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i. \sum_{j=1}^{p} a_{ji}.f_j \right) \\ &= \underbrace{(u_1 a_{11} + u_2 a_{12} + ... + u_n a_{1n})}_{v_1}.f_1 + ... + \underbrace{(u_1 a_{p1} + u_2 a_{p2} + ... + u_n a_{pn})}_{v_p}.f_p \end{aligned}$$

en notant l'image $\varphi(u) = v = (v_1, \dots, v_p)$. On remarque que pour obtenir v_1, il suffit de multiplier composante à composante la première ligne de la matrice par le vecteur u et ainsi de suite,

-3Pour obtenir la i^e composante de l'image v, il suffit de **multiplier composante à composante la i^e ligne de la matrice au vecteur u.**

On obtient donc un procédé très mécanique pour calculer l'image d'un vecteur via une application décrite par sa matrice, c'est ce que l'on appelle l'**algorithme <u>ligne-colonne</u>** :



Exemple: On reprend l'exemple précédent avec

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x',y') = (y+z, x+y+z) \end{array}$$

On a déjà trouvé

$$A = \mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut calculer de deux façons différentes l'image du vecteur $u = (1,-2,3)$:

$$f(u) = (-2+3, 1-2+3) = (1,2) \quad \text{et} \quad A.u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 1 + 1\times(-2) + 1\times 3 \\ 1\times 1 + 1\times(-2) + 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sur ce cas très simple, on ne voit pas trop l'intérêt du calcul matriciel. Mais cela devient plus clair avec des applications linéaires moins sympathiques :

Exemple: On reprend l'exercice du début : $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ p & \longmapsto & q \end{array}$
tel que $q(X) = p(X+1) + p'(X)$. En additionnant les deux matrices trouvées aux deux dernières questions de cet exercice, on trouve

$$B = \mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on veut calculer l'image du polynôme $p(X) = X^2 - 4X + 3$.
On l'exprime dans la base canonique $(1, X, X^2)$: On a $p = (3, -4, 1)$ (Attention à l'ordre !) et

$$h(p) = B.p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 2\times(-4) + 1\times 1 \\ 0\times 3 + 1\times(-4) + 4\times 1 \\ 0\times 3 + 0\times(-4) + 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $h(p) = X^2 - 4$.

Ainsi, on a trouvé une nouvelle façon de faire le calcul de l'image d'un vecteur u par une application linéaire φ :

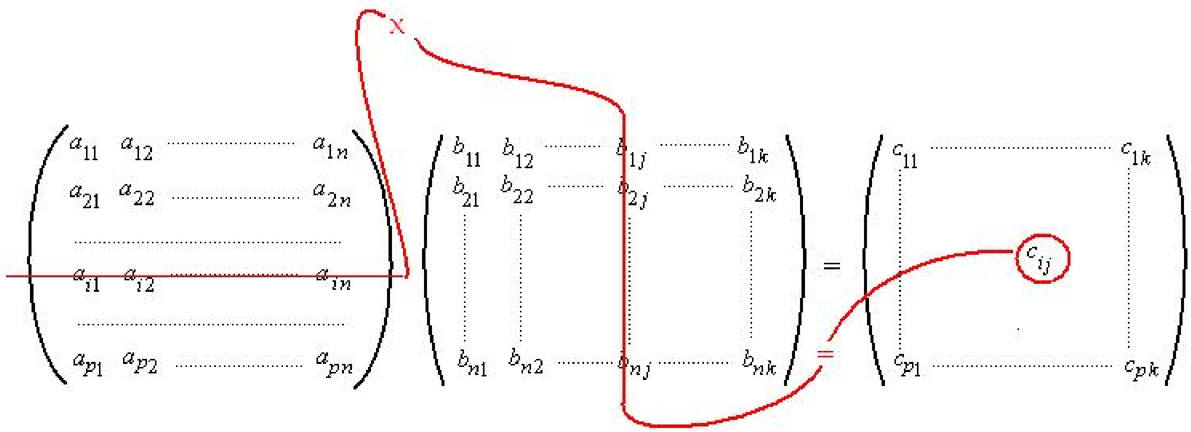
$$\boxed{\varphi(u) = \mathrm{Mat}(\varphi).u}$$

en supposant que le vecteur est exprimé dans la même base de départ que la matrice.

III.2 Produit de deux matrices

Mais il y a mieux !
En effet, le produit précédent nous invite à jouer encore plus avec les matrices. Si nous prenons une matrice de $A \in \mathcal{M}_{p\times n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$, nous avons autant de colonnes dans la première que de lignes dans la seconde.

Vous me voyez venir ? Mon côté joueur m'incite à essayer le produit précédent mais entre deux matrices au lieu d'une matrice et un vecteur. On obtient alors avec l'algorithme ligne-colonne une matrice $C \in \mathcal{M}_{p\times k}$



Si l'on veut mettre cela en formule, c'est beaucoup moins sympathique : $\boxed{c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}}$.

Exemple: On fait le produit de deux matrices (vérifiez que je ne me suis pas trompé...)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{2\times 3}} . \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{3\times 4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 11 & -2 & 2 \\ 13 & 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{2\times 4}}$$

Ah ben si. Y'a une erreur. C'est ballot. Trouvez-là.

C'est joli, mais à quoi cela correspond-t-il ?

Si l'on pose $A.B = C$ le produit de deux matrices comme précédemment : $A \in \mathcal{M}_{p\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$ et $C \in \mathcal{M}_{p\times k}$. Chacune d'entre elle correspond à une application linéaire. Disons f pour A, g pour B et h pour C. On se donne un vecteur $u \in \mathbb{R}^k$. On peut alors calculer $C.k$ qui n'est autre que $h(u)$ l'image de ce vecteur par h.

Mais on a

$$C.u = (A.B).u = A.(B.u)$$

(car le produit matriciel est associatif - vous pouvez le vérifier avec la formule générale précédente si vous avez cinq minutes). Or $B.u = g(u)$. Donc

$$C.u = (A.B).u = A.(B.u) = A.g(u) = f(g(u)) = f \circ g(u).$$

. C'est donc ça ! Le produit matriciel, c'est la composition de deux applications linéaires !

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f).\,\mathrm{Mat}(g) = \mathrm{Mat}(f \circ g)}\ .$$

Au fait, l'erreur dans l'exemple d'avant était sur le coefficient c_{23} qui vaut 13 et pas 12.

Exercice 2. ♪

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$. Qu'en dire ?

Exercice 3. ♪

Si M et N sont deux matrices de formats respectifs (m,n) et (n,m) telles que $MN = I$, montrer que la matrice $P = NM$ est **idempotente** (i.e. $P^2 = P$). En déduire que P est diviseur de zéro à gauche et à droite.

IV Des outils matriciels

IV.1 Le rang d'une matrice

On connaît déjà le rang d'une application linéaire. Il s'agit de la dimension de l'espace vectoriel image. On peut trouver cette valeur grâce à la matrice. En effet, on a une vision de l'espace image en lisant les colonnes de la matrice puisqu'elles correspondent aux images des vecteurs de la base de l'espace source. Il suffit de "voir" quels sont ceux qui sont liés !

D'habitude, on cherche des combinaisons linéaires entre ces vecteurs images, ce qui correspond à des opérations sur les colonnes. Voyons cela sur un exemple.

Exemple: Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (e_i) & \longmapsto & (u_i) \end{array}$$

où $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$, $u_3 = (2,3,4,5)$, $u_4 = (2,4,6,8)$ et $u_5 = (3,4,5,6)$. On cherche le rang de $(u_i)_{1 \leq i \leq 5}$. On écrit la matrice et on "agit" sur les colonnes par combinaisons linéaires :

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} \overbrace{u_1}^{v_1} & \overbrace{u_2 - u_1}^{v_2} & \overbrace{u_3 - 2u_1}^{v_3} & \overbrace{u_4 - 2u_1}^{v_4} & \overbrace{u_5 - 3u_1}^{v_5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{v_1}^{w_1} & \overbrace{v_2}^{w_2} & \overbrace{v_3 - v_2}^{w_3} & \overbrace{v_4 - 2v_2}^{w_4} & \overbrace{v_5 - v_2}^{w_5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

On a donc

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_5) = \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_5) = \mathrm{rg}(w_1, \ldots, w_5) = \mathrm{rg}(w_1, w_2) = \boxed{2}\,.$$

IV.2 Transposée d'une matrice

La **transposée** d'une matrice s'obtient en permutant les lignes et les colonnes. Il est un peu délicat de rentrer dans les détails théorique de cette notion qui fait intervenir l'adjoint d'une application linéaire, aussi, nous nous contenterons ici d'un exemple et d'un exercice sous forme de propriété :

Exemple: Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4. ♩

Montrer les propriétés suivantes :

1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

2) ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$.

3) ${}^t({}^tA) = A$.

4) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

Définition 10.1 *Si ${}^tA = A$, on dit que A est* ***symétrique****.*
Si ${}^tA = -A$, on dit que A est ***antisymétrique****.*

Exercice 5. ♪

Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer la forme générale des matrices symétriques, puis des matrices antisymétriques.

Exercice 6. ♩

Prouver que toute matrice de $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique et une matrice antisymétrique.

V Matrices carrées : $n = p$

Dans ce chapitre, on se concentre sur la théorie des matrices appliquée aux endomorphismes. On en profite pour simplifier un peu les notations en posant $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

V.1 Quelques matrices particulières.

- Les **matrices diagonales** : $\forall i \neq j$, $a_{ij} = 0$ i.e. $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$

Parmi elles, il y a la **matrice identité** : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Les **matrices scalaires** : $\forall i \neq j$, $a_{ij} = 0$ et $\forall i$, $a_{ii} = \lambda$ i.e. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda.I_n$

- Les **matrices triangulaires supérieures** : $\forall i > j$, $a_{ij} = 0$ i.e. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

Analogie pour les matrices triangulaires inférieures laissée au lecteur.

Parmi les matrices carrées, il en existe certaines plus intéressantes que d'autres. Les plus intéressantes sont celles qui proviennent d'un **automorphisme**. En effet, si on a un endomorphisme bijectif de $f \in \mathscr{L}(E)$, alors il existe une application linéaire réciproque, notée f^{-1} qui correspond à une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on note naturellement A^{-1}.

Définition 10.2 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.*
Si A est inversible, alors B est unique et notée A^{-1}.
*On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On l'appelle le **groupe linéaire**.*

Exercice 7. ♪
Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple: • La matrice I_n est inversible et est son propre inverse : $I_n = I_n^{-1}$.
• Une matrice diagonale sans termes diagonaux nuls est inversible. En effet, on vérifie que le produit est bien I_n :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Exercice 8. ♪
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^2 + 3A + 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible.

Proposition 10.3 *Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n)^2$ deux matrices inversibles. Alors*
• *la matrice A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*
• *la matrice ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*
• *la matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Exercice 9. ♩
En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif non-abélien.

V.2 Comment calculer une matrice inverse ?

• La méthode archaïque
En fait, calculer la matrice inverse de l'application φ correspond à déterminer la matrice de l'application réciproque φ^{-1}.

Autrement dit, si on a par exemple $\varphi(x, y, z) = (X, Y, Z)$, on veut exprimer (x, y, z) en fonction de (X, Y, Z). Pour cela , on peut le faire via le système d'équations. Si on prend $\varphi(x, y, z) = (x - y, y, y + z)$, on a

$$A = \mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a très vite :

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y & =X \\ \quad y & =Y \\ y+z & =Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =X+Y \\ y & =Y \\ z & =Z-Y \end{array}\right.$$

donc

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_3$.

• La méthode de Gauss

Tout repose sur la simple remarque que si A est inversible, alors on peut transformer A en I_n par des opérations élémentaires sur les colonnes. Ces mêmes opérations transforment I_n en A. C'est, sans aucun doute, LA méthode à connaître car elle permet de ne pas se perdre dans les calculs avec les coordonnées en ne jouant qu'avec les coefficients.

On rappelle que les **opérations élémentaires** sont au nombre de trois :
- Les permutations : $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Les dilatations : $C_i \leftarrow \lambda C_j$.
- Les combinaisons : $C_i \leftarrow C_i+\lambda C_j$.

Exemple:

$$\begin{array}{cccc}
 & A & = & AI & \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & = & A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = & A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C_1 \leftarrow C_1-C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2-C_3 \end{array} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & = & A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C_1 \leftarrow 2C_1-3C_2 \\ C_3 \leftarrow 2C_3+C_2 \end{array} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & = & A\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & C_3 \leftarrow 3C_3-C_1 \\
\Leftrightarrow & I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = & A\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} & \begin{array}{c} C_1 \leftarrow \frac{1}{6}C_1 \\ C_2 \leftarrow \frac{1}{2}C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{6}C_3 \end{array}
\end{array}$$

Attention ! Au niveau de l'écriture, on part de $A=AI$ car on agit sur les colonnes ici. Si on veut agir sur les lignes, il faut écrire $A=IA$ car on multiplie par les $B_{ij}(\lambda)$ (matrices des opérations élémentaires) à gauche. Aussi mieux vaut sans doute ne pas écrire les équivalences, ni l'égalité et écrire simplement les deux matrices avec leurs changements côte à côte sans plus de fioritures.

• La méthode de Cramer

Très lourde, elle nécessite la théorie des déterminants (voir chapitre suivant). Sans bidouilles, elle n'a d'intérêt que pour les calculatrices et pour montrer l'existence parfois.