C11-Quiz

Exercice 1. ♪ Rappeler la définition d'une application multilinéaire entre deux espaces vectoriels.

Exercice 2. ♪ Que veulent dire les termes "alterné" et "forme" dans une forme multilinéaire alternée ?

Exercice 3. 𝅘𝅥𝅯 Compléter les formules suivantes :
$\det A^{-1} = \dots \quad \det\ {}^tA = \dots \quad \det AB = \dots.$

Exercice 4. ♪ Quelle est la comatrice de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 5. ♪ Comment définir le rang d'une matrice à partir des mineurs ?

Exercice 6. ♪ Calculer, à l'aide des cofacteurs, le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7. ♪ Calculer, à l'aide de la méthode de Sarrus,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Réponses

Exercice 1 : Soit une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & F \\ & (X_1, \ldots, X_n) & \longmapsto & \varphi(X_1, \ldots, X_n) \end{array}$$

Cette application est dite **multilinéaire** (ou n-linéaire) si toutes les applications partielles $\varphi_i : X_i \longmapsto \varphi(X_1, \ldots, X_n)$ sont linéaires.
Exercice 2 : "forme" signifie que l'espace vectoriel d'arrivée est en fait $\mathbb{R}$.
"alternée" signifie que si $X_i = X_j$ pour $i \neq j$ alors la forme multilinéaire s'annule : $\varphi(X_1, \ldots, X_n) = 0$. i.e. elle est nulle quadn on calcule l'image d'une famille liée de vecteurs.
Exercice 3 : $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \quad \det {}^tA = \det A$
$\det AB = \det A \times \det B$.

Exercice 4 : $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 1 & 4 & -6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : Le **rang** d'une matrice est l'ordre le plus élevé de mineurs non nuls.

Exercice 6 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{2\times1-1\times1} +(-1)\times(-1)^{2+1}\times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{1\times1-1\times1} +0\times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{1\times1-2\times1} = 1$$

Exercice 7 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$