Déterminants

Leçon 11
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Nous décrivons ici les bases du calcul du déterminant sans entrer dans les détails, on s'attache à sa valeurs d'invariant et à son calcul.

Table des matières

Nous avons vu que les matrices les plus praticables étaient les matrices carrées. Elles codent toutes les informations d'un endomorphisme. A partir d'une matrice, on peut calculer un certain nombre d'invariants qui donnent des informations sur l'endomorphisme lui-même. Dans ce chapitre, on se concentre sur l'invariant le plus important qui va nous permettre de dire si un endomorphisme est un automorphisme.

I Les applications multilinéaires

Les applications multilinéaires sont d'un abord un peu difficile pour ceux qui n'ont pas une vision très claire des espaces vectoriels, aussi, nous nous contentons ici de donner la définition.

Définition 11.1 *Soient $n+1$ espaces vectoriels $E_1, E_2 \dots, E_n$ et F. Soit une application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & F \\ & (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & \varphi(X_1, \dots, X_n) \end{array}$$

Cette application est dite ***multilinéaire*** *(ou n-linéaire) si toutes les applications partielles $\varphi_i : X_i \longmapsto \varphi(X_1, \dots, X_n)$ sont linéaires.*
Si $F = \mathbb{R}$, on parle de ***forme multilinéaire***

Pour voir si un objet de ce type est une application multilinéaire, l'idée de base est donc de "geler" toutes les variables $X_1, \dots, X_n$ sauf une et de vérifier que l'application partielle ainsi écrite est linéaire. On recommence pour toutes les variables.

Remarque: Quand $n = 2$, on parle plus volontiers de **forme bilinéaire**.

Exemple: Le produit scalaire est une forme bilinéaire. En effet, prenons l'exemple dans le plan réel :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & u.v \end{array}$$

On rappelle que le produit scalaire dans le plan est défini par $u.v = ||u|| \times ||v|| \times \cos(u,v)$ (quand aucun des deux vecteurs n'est nul).

On a bien une forme car le produit scalaire en bien dans $\mathbb{R}$.

Pour la multilinéarité, on vérifie sur la première variable en gelant la seconde :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & u.v \end{array}$$

Il est clair que $\varphi_1(\lambda u + \mu u') = (\lambda u + \mu u').v = \lambda(u.v) + \mu(u'.v) = \lambda\varphi_1(u) + \mu\varphi_1(v)$.

Pour la linéarité de φ_2, nul besoin de se fatiguer, il suffit de constater que φ est **symétrique**. En effet, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.

Définition 11.2 *Une forme multilinéaire est dite* ***alternée*** *si*

$$X_i = X_j \text{ pour } i \neq j \text{ implique } \varphi(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

Exercice 1. ♪
Montrer que le produit scalaire n'est pas alterné.

Définition 11.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ rapporté à la base $(e_1, \dots, e_n)$. Il existe alors une seule forme n-linéaire alternée D sur E^n telle que $D(e_1, \dots, e_n) = 1$.*
Sa valeur pour n vecteurs $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ est appelée ***déterminant*** *et notée* $\det(u_1, \dots, u_n)$.
Si on écrit les coordonnées des vecteurs u_j dans la base (e_i) : $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, alors on note

$$\det(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Le nombre de ligne (ou de colonne) s'appelle l'**ordre du déterminant**.*

Remarque: On rappelle le déterminant classique de deux vecteurs du plan : $\det(u,v) = ||u|| \times ||v|| \times \sin(u,v)$. Ou encore (et on sera plus à l'aise ici) avec les coordonnées :

$$\det(u,v) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exercice 2. ♪
Montrer que le déterminant de deux vecteurs ainsi défini est bien un déterminant au sens de la forme multilinéaire.

II Propriétés du déterminant.

II.1 Conséquences directes de la définition.

On expose ici un certain nombre de propriétés issues directement de la définition des formes multilinéaires associées au déterminant.

• Un déterminant est nul si l'une de ses colonnes est une combinaison linéaire des autres colonnes (idem pour les lignes).

• Plus généralement, la valeur d'un déterminant ne change pas si on remplace une colonne (ou une ligne) par une combinaison linéaire élémentaire des autres colonnes (ou lignes) i.e. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

- En revanche, si l'on échange deux colonnes (ou deux lignes), le déterminant est multiplié par -1.
- Enfin, si on multiplie une colonne (ou une ligne) par un réel λ, le déterminant est multiplié par λ.

La première propriété listée est, de loin, la plus importante. Elle mérite même une mise en forme de sa conséquence :

Théorème 11.4 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

On comprend mieux cette notion d'**invariant**. Le déterminant est une "machine" à statuer sur l'inversibilité d'une matrice.

Proposition 11.5 *Si A et B sont des matrices d'ordre n, alors*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$
$$\det {}^tA = \det A$$
$$\det AB = \det A \times \det B.$$

II.2 Les cofacteurs.

Définition 11.6 *Dans un déterminant d'ordre n, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j est appelé **mineur** associé à a_{ij} noté A_{ij}.*
*Le **cofacteur** associé à ce mineur est la valeur*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

On peut même créer ce que l'on appelle la **matrice des cofacteurs** (ou plus simplement la **comatrice**) Il s'agit de la matrice obtenue en lui attribuant pour coefficients les Δ_{ij}. On la note parfois $\mathrm{Com}(A)$, mais attention, la notation n'est standardisée et il convient de rappeler de quoi on parle dans une copie de concours.

Exemple: En partant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la comatrice est

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} \boxed{+}(+1) & \boxed{-}(+4) & \boxed{+}(+10) \\ \boxed{-}(-1) & \boxed{+}(+4) & \boxed{-}(+6) \\ \boxed{+}(-1) & \boxed{-}(-4) & \boxed{+}(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 1 & 4 & -6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Attention ! Ne pas oublier l'alternance des signes !

Exercice 3.

Calculer la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Définition 11.7 *Le **rang** d'une matrice est l'ordre le plus élevé de mineurs non nuls.*

Remarque: Cette définition est évidemment reliée au rang de l'application linéaire associée à la matrice. En effet, si un mineur d'ordre p est non nul, cela signifie que les p vecteurs colonnes associés ne sont pas liés et on en conclut que la dimension de l'espace image est au moins p. En prenant l'ordre le plus grand, on s'assure de retrouver la dimension de l'image par l'application linéaire associée, soit le rang de cette application.

III Calcul du déterminant.

III.1 Développement suivant les colonnes ou les lignes.

Il s'agit de la technique dite du développement suivant une colonne (ou une ligne). Elle est basée sur le théorème suivant :

Théorème 11.8 *Si A est une matrice carrée d'ordre n,*

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}} .$$

Exemple: On veut calculer par exemple ce déterminant d'ordre 3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut choisir de développer par rapport à n'importe quelle colonne ou ligne. Choisissons dans un premier temps la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{2\times 1 - 1\times 1} + (-1)\times(-1)^{2+1} \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{1\times 1 - 1\times 1} + 0 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{1\times 1 - 2\times 1} = 1$$

On voit sur cet exemple qu'on a tout intérêt à développer suivant la colonne ou la ligne qui contient le plus de 0. On peut aller un peu plus vite en combinant les opérations sur les colonnes ou les lignes et les cofacteurs. Par exemple ici, en faisant $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, on trouve :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

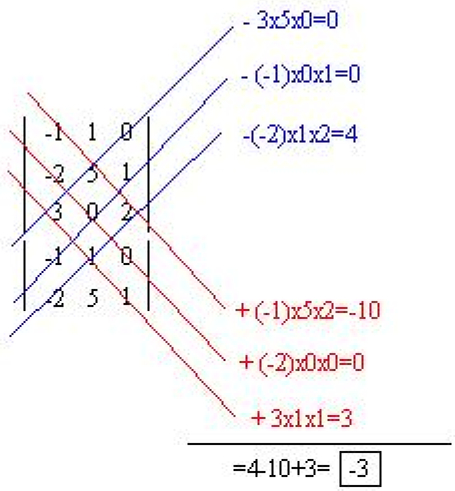
que l'on développe via les cofacteurs de la dernière ligne pour obtenir, là encore (et ça rassure) 1.

III.2 Avec la règles de Sarrus.

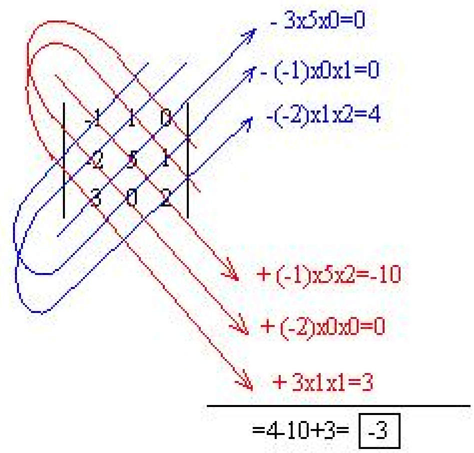
ATTENTION : Il convient de mettre tout de suite en garde contre toute velléité : Cette règle =ne s'applique qu'au matrice 3×3. Je répète :

Cette règle ne s'applique qu'aux matrices 3×3.

La méthode est de calculer toutes le diagonales (en le complétant éventuellement) en les additionnant si elles sont Nord-Ouest/Sud-Est et en les retranchant si elles sont Sud-Ouest/Nord-Est comme sur le dessin ci-dessous.



ou



Exercice 4. ♪

Calculer les déterminants suivants :

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

IV Inverser une matrice avec les déterminants.

Théorème 11.9 *(Formule de Cramer) Si la matrice A est inversible, alors*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^{t}\,Com(A)}$$

Exemple: Reprenons notre exemple favori et essayons de lui appliquer cette méthode :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la comatrice a déjà été calculée :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 1 & 4 & -6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant de A (via le développement de la dernière colonne par exemple) et on trouve : $\det A = (-1)^2 \times (4 \times 2 - (-2) \times 1) + 0 + (-1)^2 \times (2 \times 1 - 4 \times 1) = 8$.

D'où le calcul de l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

On pourrait croire que ce processus est très (trop) compliqué, mais il n'en est rien. Quand les matrices sont simples ou creuses, c'est souvent la technique gagnante en terme de rapidité.

Exemple: Essayons avec la matrice creuse suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut $\det B = -3$ en utilisant Sarrus ou un développement suivant la dernière colonne ou la première ligne. La comatrice n'est pas plus difficile à calculer :

$$\mathrm{Com}\, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où l'inverse :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encore plus rapide ! Pour une matrice 2×2 : Pour $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.
Le déterminant vaut 1 et la comatrice est élémentaire car il n'y a pas de cofacteurs à calculer.

$$\mathrm{Com}\, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ d'où l'inverse } C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$