C12-Quiz

Exercice 1. ♪ La matrice de passage de l'ancienne base $\mathscr{B}$ dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$ s'exprime comment ? Et à quoi sert-elle ?

Exercice 2. 𝅘𝅥𝅯 Dessiner le diagramme fondamental de changement de base.

Exercice 3. ♪ Donner la définition de deux matrices semblables. (Qu'est-ce que ça veut dire en fait ?)

Exercice 4. 𝅘𝅥𝅯 Donner la définition d'une valeur propre.

Exercice 5. ♪ Donner la définition d'un vecteur propre.

Exercice 6. ♩ Démontrer la sorite suivante par permutation circulaire :
Soient E un espace vectoriel de dimension finies et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. $\lambda \in \operatorname{Spec}(\varphi)$.
2. $V_\lambda \neq \{O_E\}$.
3. $\dim V_\lambda \geq 1$.
4. $(\varphi - \lambda \operatorname{Id})$ n'est pas injective.
5. $(\varphi - \lambda \operatorname{Id})$ n'est pas bijective.
6. $\det(A - \lambda I) = 0$.
7. Le système $(A - \lambda I)X = 0$ n'admet pas de solution unique avec $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Exercice 7. ♪ Montrer que si λ et μ sont des valeurs propres, alors

$$V_\lambda \cap V_\mu = \{O_E\}$$

Exercice 8. Montrer la sorite suivante :
Soient E un espace vectoriel de dimension finies et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ de matrice associée A.

1. A inversible.
2. φ est bijective.
3. $\operatorname{Ker} \varphi = \{O_E\}$.
4. $\exists B \ / \ BA = AB = I$.
5. $\operatorname{rg}(A) = \dim E$.
6. $0 \notin \operatorname{Spec}(A)$.

Exercice 9. ♪ Compléter la phrase suivante en termes d'espaces propres : φ est diagonalisable si et seulement si $E = ...$

Exercice 10. ♪ Enoncer le théorème spectral.

Exercice 11. ♪ Quelle est le lien entre la trigonalisabilité et le polynôme caractéristique ?

Réponses

Exercice 1 : Elle s'exprime à partir des coordonnées des (e'_i) dans l'ancienne base (e_i) :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \\ \vdots \\ \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Elle permet de calculer les coordonnées d'un vecteur de la nouvelle base X' dans l'ancienne : $X = PX'$.

Exercice 2 :

$$\begin{array}{ccc}
(e_i)_{i=1}^n & \xrightarrow{A} & (f_j)_{j=1}^p \\
\Big\uparrow P & & \Big\downarrow Q^{-1} \\
(e'_i)_{i=1}^n & \xrightarrow{B} & (f'_j)_{j=1}^p
\end{array}$$

Exercice 3 : Deux matrices carrées A et B, d'ordre n sont dites **semblables** s'il existe une matrice de changement de base P telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

Cela signifie que ces matrices représentent la même transformtaion de l'expace, mais exprimée dans deux base différentes.

Exercice 4 : Le réel λ est une **valeur propre** de φ s'il existe un vecteur u non nul tel que

$$\varphi(u) = \lambda u$$

Exercice 5 : Si $\varphi(u) = \lambda u$, on dit que u est un vecteur propre de φ associé à λ

Exercice 6 : $i) \Rightarrow ii)$ Par définition de la valeur propre.

$ii) \Rightarrow iii)$ Si un espace vectoriel continet au moins un élément non nul, alors il est de dimension au moins 1.

$iii) \Rightarrow iv)$ Comme $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}) = V_\lambda$, l'implication est évidente.

$iv) \Rightarrow v)$ Les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension, donc l'injectivité est équivalente à la bijection.

$v) \Rightarrow vi)$ Propriété du déterminant.

$vi) \Rightarrow vii)$ Le déterminant étant nul, cela veut dire qu'il existe X non nul tel que $(A - \lambda I)X = 0$ et donc αX est solution pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

$vii) \Rightarrow i)$ Par définition X est un vecteur propre associé à λ.

Exercice 7 : Si $x \in V_\lambda \cap V_\mu$, alors $\varphi(x) = \lambda x = \mu x$. Mais comme $\lambda \neq \mu$, on a bien $x = 0$.

Exercice 8 : $i) \Rightarrow ii)$ Même vocabulaire.

$ii) \Rightarrow iii)$ Propriété du cours.

$iii) \Rightarrow iv)$ φ est injective, donc bijective. On note B la matrice associée à φ^{-1}.
$iv) \Rightarrow v)$ Par l'absurde, si $\mathrm{rg}(A) < \dim E$, alors il existe des éléments x non nuls de E tels que $Ax = 0$. Donc on ne peut pas trouver B tel que $BAx = Ix = x$.
$v) \Rightarrow vi)$ Par la contraposée.
$vi \Rightarrow i)$ Par contraposée là encore.
Exercice 9 : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)} \dim V_\lambda$.
Exercice 10 : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
Exercice 11 : Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si si son polynôme caractérisque est scindé.