# Diagonalisation

Leçon 12
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

**Résumé**

Ce chapitre est entièrement dévolu à la simplification des matrices. On explique comment les changements de bases permettent d'obtenir des matrices plus faciles à manipuler. Ce but nécessite l'introduction des valeurs propres et vecteurs propres. La fin du chapitre traite des conséquences de la diagonalisation des matrices.

## Table des matières



# I Matrices de passage - Changement de base

## I.1 Matrices de passage

Le problème traité ici est celui du changement de base : Imaginons que l'on a un endomorphisme $\varphi$ sur un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. On utilise une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (dite **ancienne base**) pour exprimer la matrice de $\varphi$ dans cette base.

Si l'on se donne une **nouvelle base** $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, quelle est la matrice de $\varphi$ associée à cette base en fonction de la précédente ?

Pour résoudre ce problème, on fait appel à la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ que l'on note $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ ou plus simplement $P$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. Cette matrice est obtenue en exprimant les vecteurs $e'_i$ en colonne dans la base $\mathcal{B}$.

Si on note $e'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$ pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$P_{\mathcal{BB}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \\ \vdots \\ \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Si $X = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est le vecteur colonne représentant le vecteur $u$ dans la base $\mathcal{B}$ et si $X' = {}^t(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ est le vecteur colonne représentant le même vecteur $u$ dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a

$$\boxed{X = PX'}.$$

En effet, si l'on exécute le produit matriciel du terme de droite, on obtient un vecteur colonne dont les coordonnées sont $(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\alpha'_i)_j$, ce qui correspond bien à $X$ car on a, en termes de sommes de vecteurs sur les bases :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i \text{ et comme } e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \text{ on a bien}$$
$$u = \sum_{i=1}^{n} \left( \alpha'_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha'_i \right)}_{\alpha_j} e_j.$$

ce qui correspond bien aux coordonnées de $u$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

ATTENTION ! La matrice de passage $P_{\mathcal{BB}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet de transformer un vecteur exprimé dans la base $\mathcal{B}'$ en un vecteur exprimé dans la base $\mathcal{B}$. C'est le contraire de la logique littérale, mais il y a une bonne raison à cela que nous verrons plus tard.

Il faut donc retenir que cela fonctionne à l'envers du sens littéral :

$$(e'_i) \xrightarrow{P_{\mathcal{BB}'}} (e_i).$$

*Exemple:* Prenons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une nouvelle base telle que

$$\begin{cases} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases}$$

On a alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ qui vaut

$$P_{\mathcal{BB}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on prend le vecteur $u = {}^t(2, 1, 0)$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, ce que l'on notait $X'$ plus haut. En effectuant le calcul, on trouve :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = X$$

Si l'on choisit maintenant un vecteur $v = e'_2 = {}^t(0, 1, 0)$, va-t-on retrouver l'expression donnée au départ de l'exemple ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_3$$

Ca marche !

Mais il faut admettre que cela ne sert pas à grand chose car il serait plus intéressant d'obtenir les coordonnées de notre vecteur dans la nouvelle base à partir de ses coordonnées dans l'ancienne base !

En fait, ce n'est pas si difficile. Une première remarque est que la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est inversible : En effet, il s'agit de la matrice associée à l'isomorphisme $\varphi$ qui envoie la base $\mathcal{B}$ sur la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, $\varphi(e_i) = e'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Et comme $(e'_1, \ldots, e'_n) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base, le sous-espace vectoriel engendré (qui est l'espace image de $\varphi$) est bien de dimension $n$ et $\varphi$ est un isomorphisme car surjectif entre deux espaces de même dimension.

Inversons la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. On trouve

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Voyons sur un petit calcul pour nous rassurer qu'il s'agit bien de la matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On choisit le vecteur image calculé tout précédemment : $X = {}^t(1, 2, 3)$. On a

$$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.X = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ouf ! Rassuré je suis. En fait, sur le plan des endomorphismes, cela ne fait pas de doute comme nous allons le voir.

## I.2 Changement de base

On pose $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ avec deux bases $(e_i)_{i=1}^n$ et $(e'_i)_{i=1}^n$. De même, on se donne $F$ un espace vectoriel de dimension $p$ avec deux bases $(f_j)_{j=1}^p$ et $(f'_j)_{j=1}^p$.

Si $\varphi$ est un endomorphisme de $E$ dans $F$, on peut lui associer une matrice dans les bases $(e_i)_{i=1}^n$ et $(f_j)_{j=1}^p$, notée $A = \mathrm{Mat}_{e_i f_j}(\varphi)$.

Objectif : On voudrait trouver la matrice correspondant à $\varphi$ avec les bases $(e'_i)_{i=1}^n$ et $(f'_j)_{j=1}^p$.

On note les matrices de passage respectives $P = P_{(e_i)(e'_i)}$ et $Q = P_{(f_j)(f'_j)}$. Si $u$ est un vecteur de $E$ exprimé dans la base $(e'_i)$, on cherche donc $\varphi(u)$ dans la base $(f'_j)$. Dans l'ordre, il faut :

• Convertir $u$ dans la base $(e_i)$. Cela se fait via la matrice $P$. On obtient donc $Pu$.

• Calculer l'image de $Pu$ via $\varphi$. Comme $PU$ est bien exprimé dans la base $(e_i)$, on peut faire le produit $APu$ pour avoir l'image de $Pu$ dans la base $(f_j)$.

• Il reste à convertir $APu$ dans la base $(f_j)$, ce qui se fait via la matrice de changement de base de $(f'_j)$ à $(f_j)$. Mais $P_{(f'_j)(f_j)} = P^{-1}_{(f_j)(f'_j)} = Q^{-1}$. D'où le calcul $Q^{-1}APu$.

Ainsi, on a :

$$\boxed{B = \mathrm{Mat}_{(e'_i)(f'_j)}(\varphi) = Q^{-1}AP}\,.$$

Une bonne façon de retenir cette formule (la seule qui évite de se mélanger les pinceaux par la suite est de retenir le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} (e_i)_{i=1}^n & \xrightarrow{A} & (f_j)_{j=1}^p \\ \uparrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle Q^{-1}} \\ (e'_i)_{i=1}^n & \xrightarrow{B} & (f'_j)_{j=1}^p \end{array}$$

On suit le petit train : on commence par appliquer $P$ puis $A$, puis $Q^{-1}$. Et on a bien $B = Q^{-1}AP$.

# II Matrices semblables

**Définition 12.1** *Deux matrices carrées $A$ et $B$, d'ordre $n$ sont dites* ***semblables*** *s'il existe une matrice de changement de base $P$ telle que :*

$$B = P^{-1}AP.$$

*Remarque:* Compte tenu de ce qui a été écrit ci-dessus, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

**Exercice 1.** ♪

Soient $A$ et $B$ deux matrices semblables,

**1)** La matrice $A$ est inversible si et seulement si $B$ est inversible.

**2)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k$ et $B^k$ qui sont semblables.

**Exercice 2.** ♪

Si $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A$ est inversible, montrer que $A^{-1}B$ et $BA^{-1}$ sont semblables.

# III Valeurs propres et vecteurs propres.

**Définition 12.2** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.*

*Le réel $\lambda$ est une* ***valeur propre*** *de $\varphi$ s'il existe un vecteur $u$ non nul tel que*

$$\varphi(u) = \lambda u$$

*Dans ce cas, on dit que $u$ est un* ***vecteur propre*** *associé à la valeur propre $\lambda$.*

*L'ensemble des vecteurs propres associé à la valeur propre $\lambda$ est un sous-espace vectoriel appelé* ***sous-espace propre***

$$V_\lambda = \{u \in E/\ \varphi(u) = \lambda u\} = Ker(\varphi - \lambda\, Id).$$

*L'ensemble des valeurs propres de $\varphi$ s'appelle le* ***spectre*** *de $\varphi$, que l'on note $Spec(\varphi)$.*

*Remarque:* On a $V_0 = \operatorname{Ker}\varphi$. Donc

$$0 \in \operatorname{Spec}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ n'est pas injective.}$$

**Sorite 12.3** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finies et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.*

*i.* $\lambda \in Spec(\varphi)$.

*ii.* $V_\lambda \neq \{O_E\}$.

*iii.* $\dim V_\lambda \geq 1$.

*iv.* $(\varphi - \lambda\, Id)$ *n'est pas injective.*

*v.* $(\varphi - \lambda\, Id)$ *n'est pas bijective.*

*vi.* $\det(A - \lambda I) = 0$.

*vii.* *Le système $(A - \lambda I)X = 0$ n'admet pas de solution unique avec $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de $E$.*

**Exercice 3.** ♩

Si $\lambda$ et $\mu$ sont deux valeurs propres distinctes de $\varphi$, alors $V_\lambda \cap V_\mu = \{0_E\}$.

En particulier, si on applique la sorite précédente pour $\lambda = 0$, on obtient une autre sorite très importante :

**Sorite 12.4** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finies et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ de matrice associée $A$.*

*i.* $A$ *inversible.*

*ii.* $\varphi$ *est bijective.*

*iii.* $Ker\,\varphi = \{O_E\}$.

*iv.* $\exists B \;/\; BA = AB = I$.

*v.* $rg(A) = \dim E$.

*vi.* $0 \notin Spec(A)$.

**Exercice 4.** ♩
Ecrire à nouveau cette sorite en partant de $A$ non inversible en essayant de démontrer les enchaînements.

**Théorème 12.5** *Soit $E$ un espace vectoriel et $\varphi$ un endomorphisme de $E$.*
*Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de $\varphi$, alors les $V_{\lambda_i}$ sont en somme directe :*

$$F = \bigoplus_{i=1}^{p} V_{\lambda_i}.$$

*où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

Tout ce qui vient d'être fait dans ce paragraphe se traduit facilement en terme matriciel. On parle donc, sans ambiguïté d'une valeur propre d'une matrice ou du spectre d'une matrice...

Comment trouver les valeurs propres ?
Il suffit de comprendre la sorite précédente : Dire que $\lambda$ est valeur propre de la matrice $A$ signifie que $\det(A - \lambda I) = 0$. On calcule donc le polynôme

$$\chi_A(X) = \det(A - XI)$$

et on cherche ses racines réelles.

**Définition 12.6** *Le polynôme $\chi_A(X) = \det(XI - A)$ s'appelle le* ***polynôme caractéristique*** *de $A$.*

*Il est de degré $n$ (l'ordre de la matrice) et unitaire ; il ne dépend pas de la base considérée et ses racines réelles sont les valeurs propres de $A$.*

*Remarque:* On a donc $\mathrm{Spec}(\varphi)$ fini, de cardinal $\mathrm{card}\,\mathrm{Spec}(\varphi) \leq n$. Mais $\mathrm{Spec}(\varphi)$ peut être vide ! ! (En effet, il suffit que le polynôme caractéristique n'ait pas de racine dans le corps dans lequel on travaille).

**Exercice 5.** ♪
Deux matrices semblables ont le même spectre.

**Exercice 6.** ♪
Si $A$ est une matrice triangulaire, alors le spectre de $A$ est l'ensemble des éléments diagonaux.

**Définition 12.7** *Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, on appelle* ***multiplicité algébrique*** *de $\lambda$ l'ordre de $\lambda$ en tant que racine du polynôme caractéristique.*

*On appelle* ***multiplicité géométrique*** *de $\lambda$ la dimension de l'espace propre associé $V_\lambda$.*

On remarque que la multiplicité géométrique est toujours inférieure ou égale à la multiplicité algébrique.

# IV Diagonalisation

**Définition 12.8** *Un endomorphisme $\varphi$ d'un espace vectoriel $E$ est dit* ***diagonalisable*** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.*

En manipulant un peu les matrices, face à la difficulté des calculs, on comprend l'enjeu d'un tel paragraphe. En effet, si la matrice est diagonale, le monde s'éclaire et tout devient plus facile.

**Sorite 12.9** *Soit $\varphi$ un endomorphisme de $E$.*

*i.* $\varphi$ *est diagonalisable.*

*ii.* *il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres.*

*iii.* $E = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\varphi)} V_\lambda$.

*iv.* $\dim E = n = \sum\limits_{\lambda \in Spec(\varphi)} \dim V_\lambda$.

**Corollaire 12.10** *Si $\varphi$ admet $n$ valeurs propres distinctes, alors $\dim V_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in Spec(\varphi)$ et $\varphi$ est diagonalisable.*

**Théorème 12.11** *Une matrice $A$ est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre, la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique.*

*Il existe alors une base de vecteurs propres de $E$ dans laquelle la matrice s'écrit*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

*<u>les valeurs propres apparaissant autant de fois dans la diagonales que leur multiplicité.</u>*

<u>Méthode pratique :</u>

On détermine la polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(XI - A)$.
On détermine les sous-espaces propres associés aux valeurs propres

Si $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)} \dim v_\lambda \begin{cases} = n & \text{alors } A \text{ est diagonalisable,} \\ \neq n & \text{alors } A \text{ n'est pas diagonalisable.} \end{cases}$

*<u>Exemple:</u>* On applique le procédé sus-décrit à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

• On commence par le calcul du polynôme caractéristique :

$$-\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(2-X) \begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(3-X)$$

en développant par rapport à la dernière colonne.
Les valeurs propres sont donc 2 et 3 avec pour multiplicités algébriques respectives 2 et 1.
On aurait bien évidemment préféré n'avoir que des valeurs propres simples pour conclure tout de suite. Tant pis.

• On détermine les sous-espaces propres en commençant par $V_3$.
Pour cela, il faut résoudre $Au = 3u$, ce qui équivaut à $(A - 3I)u = 0_{\mathbb{R}^3}$. D'où le système :

$$(A-3I).{}^t(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} y=0 \\ -y=0 \\ -x-y-z=0 \end{array} \right.$$

D'où l'espace propre : $V_3=\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)=\alpha(1,0,-1)\}$

• Ca se corse quand on veut déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 :

On résout :

$$(A-2I).{}^t(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x+y=0 \\ -x-y=0 \end{array} \right.$$

D'où l'espace propre : $V_2=\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)=\alpha(1,-1,0)+\beta(0,0,1)\}$

qui est de dimension 2. Ouf ! La multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique et la matrice est diagonalisable.

• On choisit une base de vecteurs propres $v_3={}^t(1,0,-1)$, $v_2={}^t(1,-1,0)$ et $v_2'={}^t(0,0,1)$.

On a donc la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la nouvelles base $\mathcal{B}'=(v_3,v_2,v_2')$.

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice que l'on peut facilement inverser :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}=P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite

$$B=P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}AP_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7.** ♩

Appliquer cette méthode aux matrices suivantes :

**1)** $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**2)** $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

**3)** $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**4)** $D=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Voici un théorème non constructif mais qui apparaît parfois à l'écrit :

**Théorème 12.12** *(Théorème spectral) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (éventuellement dans $\mathbb{C}$).*

**Attention !** • Il faut tout d'abord expliquer ce "éventuellement dans $\mathbb{C}$". En effet, le polynôme caractéristique peut n'être scindé que dans $\mathbb{C}$. Comme pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

• Si la matrice n'est pas réelle, ce théorème est faux. En effet, il suffit de vérifier :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A(X) = (X-i)^2$, donc $\mathrm{Spec}(A) = \{i\}$. Mais comme $A \neq iI_2$, alors elle n'est pas diagonalisable (même dans $\mathbb{C}$).

*Remarque:* Une petite astuce qui permet de détecter pas mal d'erreurs est de vérifier que les traces de la matrice de départ et de celle diagonalisée sont identiques.

# V Trigonalisation

**Théorème 12.13** *Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

*Remarque:* Dans le cas où la matrice est diagonalisable, c'est évidemment le chapitre qui précède qui fournit le résultat. Si, en revanche, elle n'est pas diagonalisable, alors il faut reprendre la méthode précédente en y ajoutant une petite subtilité.

Prenons la matrice $D$ précédente que l'on renomme $A$ pour plus d'homogénéité. On a $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Le calcul du polynôme caractéristique donne $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$.

Le calcul du sous-espace propre associé à $-1$ donne un espace de dimension 1 engendré par $v_{-1} = {}^t(2,-1,1)$.

Le problème arrive quand on cherche le sous-espace propre associé à 1 :

$$(A-I).{}^t(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -1 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x+5y+7z = 0 \\ -x+5y+9z = 0 \\ -2y-4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x-3z = 0 \\ -x-z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$$

D'où l'espace propre : $V_1 = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) = \alpha(1,2,-1)\}$ qui est de dimension 1, engendré par $v_1 = {}^t(1,2,-1)$. Donc on va traiter le cas problématique où la multiplicité algébrique (2) est strictement plus grande que la multiplicité géométrique (1).

Il nous manque donc un vecteur pour notre nouvelle base...

On choisit un vecteur simple que l'on placera à la fin : $v = {}^t(0,0,1)$ et l'on a une nouvelle base $\mathcal{B}' = (v_{-1}, v_1, v)$. La matrice de passage associée est

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# VI Puissance d'une matrice.

- Si $A$ est une matrice triangulaire ne comportant que le réel $\alpha$, on utilise une décomposition de type Jordan : $A = \alpha I + J$ où $J$ est une matrice nilpotente. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $J^k = 0$ et on applique la formule du binôme.

**Exercice 8.** ♩

Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ quand $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• Si $A$ est diagonalisable : $D = P^{-1}AP$, on montre facilement (c'est un exercice laissé au lecteur) que $A^n = PD^nP^{-1}$.

**Exercice 9.** ♪

Reprendre l'exemple déjà traité de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et calculer $A^n$.

• S'il existe $P$ un **polynôme annulateur** de $A$ (i.e. un polynôme tel que $P(A) = 0$), on effectue la division euclidienne de $X^n$ par $P$. On obtient alors

$$X^n = P(X)Q(X) + R(X) \text{ et } A^n = R(A).$$

**Exercice 10.** ♩

Calculer $A^5$ quand $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On pourra donc commencer par calculer un polynôme annulateur (comme le polynôme caractéristique par exemple...).

# VII Applications

## VII.1 Suites récurrentes linéaires.

*Exemple:* La suite de Fibonacci : $\begin{cases} u_0 = 1, \; u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{pour } n > 1 \end{cases}$

L'idée est de faire intervenir les matrices et de se ramener à une suite "presque" géométrique :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Compte tenu de ce que nous avons écrit au paragraphe précédent, il faut déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisée.

Le polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$ (les spécialistes auront tout de suite vu le lien avec le nombre d'or qui est racine de ce polynôme) dont les racines sont les valeurs propres de $A$ :

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} (= \phi) \text{ et } \frac{1+\sqrt{5}}{2} (= \varphi).$$

Donc la matrice est bien diagonalisable. On trouve pour vecteurs propres

$$v_\phi = {}^t(\phi, 1) \text{ et } v_\varphi = {}^t(\varphi, 1)$$

Donc $P = \begin{pmatrix} \varphi & \phi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$.

Donc

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \text{ et } A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \phi^{n+1} & \phi^{n+1}\varphi - \phi\varphi^{n+1} \\ \varphi^n - \phi^n & \phi^n\varphi - \phi\varphi^n \end{pmatrix}$$

ce qui donne, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ et tous calculs faits

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \phi^n + \phi^n\varphi - \phi\varphi^n) \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n\sqrt{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n\sqrt{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n \\
&= \boxed{\left[\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right]\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left[\frac{-\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right]\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.
\end{aligned}$$

*Exemple:* $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = -2, \\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

Même principe. On a, grâce aux matrices :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2, -1\}$ et les vecteurs propres correspondants : $v_1 = {}^t(1,1,1)$, $v_2 = {}^t(4,2,1)$ et $v_{-1} = {}^t(1,-1,1)$. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors $u_n = 1 - \frac{2}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n + 1 - (-1)^n + 1 - \frac{1}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \boxed{3 - 2^n - (-1)^n}$.

*Exemple:* Avec plusieurs suites : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n + 5w_n \\ u_0 = 1,\ v_0 = w_0 = 0. \end{cases}$

On fait appel aux matrices là encore :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

[...]

On trouve $\begin{cases} u_n = -4 + 3 \times 2^n \\ v_n = 3 \times 2^{n-1} \\ w_n = 1. \end{cases}$

## VII.2 Systèmes différentiels

On rappelle que les fonctions solution de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $y : t \longmapsto Ke^{at}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Imaginons qu'on ait à résoudre le système de trois équations différentielles

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 2y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 4y + z \end{cases}$$

Avec les matrices, on pose $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\dfrac{dV}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} V$$

[...]

On trouve deux valeurs propres 2 et 3 de multiplicités algébriques respectives 1 et 2. Fort heureusement, 3 est aussi de multiplicité géométrique 2. Donc la matrice $A$ est diagonalisable.

On prend pour nouvelle base $v_2 = {}^t(-1,1,2)$, $v_3 = {}^t(1,0,1)$ et $v_3' = {}^t(0,1,2)$. On pose alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ V = PW \text{ avec } W = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{ et } \frac{dV}{dt} = P\frac{dW}{dt}.$$

On trouve alors dans la nouvelle base :

$$P\frac{dW}{dt} = APW \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{P^{-1}P}_{I}\frac{dW}{dt} = \underbrace{P^{-1}AP}_{D}W \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 3X \\ \dfrac{dY}{dt} = 3Y \\ \dfrac{dZ}{dt} = 2Z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = K_1e^{3t} \\ Y = K_2e^{3t} \\ Z = K_3e^{2t} \end{cases}$$

d'où

$$V = PW = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1e^{3t} - K_3e^{2t} \\ K_2e^{3t} + K_3e^{2t} \\ K_1e^{3t} + 2K_2e^{3t} + 2K_3e^{2t} \end{pmatrix}$$

On notera que l'on n'a pas eu besoin de calculer l'inverse de $P$.

## VII.3 Matrices stochastiques.

**Définition 12.14** *Une* ***matrice stochastique*** *est une matrice à coefficients positifs dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut* 1.

*Remarque:* Un exercice fait précédemment nous a déjà montré que les matrices stochastiques sont stables pour le produit matriciel.

**Exercice 11.** ♩

Montrer que si $M$ est une matrice stochastique, alors $1 \in \mathrm{Spec}(M)$.

*Exemple:* Trois produits concurrentiels $A$, $B$, et $C$ se partagent le même marché. A une date donnée $t_0$, les parts respectives de ces produits sont $0,5$ pour $A$, $0,2$ pour $B$ et $0,3$ pour $C$.

Soient $\alpha_t$, $\beta_t$ et $\gamma_t$ les parts respectives à l'instant $t$. On donne les probabilités de transition sous la forme d'une matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$p(A_{t+1}) = \alpha_{t+1} = p_{A_t}(A_{t+1}) \times p(A_t) + p_{B_t}(B_{t+1}) \times p(B_t) + p_{C_t}(C_{t+1}) \times p(C_t) = 0,3\alpha_t + 0,1\beta_t + 0,4\gamma_t.$$

On constate donc que

$$\begin{pmatrix} \alpha_{t+1} \\ \beta_{t+1} \\ \gamma_{t+1} \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} \text{ ou encore } (\alpha_{t+1}, \beta_{t+1}, \gamma_{t+1}) = (\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)M.$$

En utilisant un fac-similé des suites géométriques, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} = ({}^tM)^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

On doit diagonaliser la matrice pour calculer sa puissance $n^e$.

On trouve $\det({}^tM - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 0,1\lambda - 0,03)$. Les valeurs propres sont donc $\operatorname{Spec} {}^tM = \{1, \lambda_1, \lambda_2\}$. Une remarque importante est que les valeurs propres d'une matrice stochastique sont toujours 1 et d'autres réels $\lambda$ tels que $|\lambda| \leq 1$.

On a alors ${}^tM$ est diagonalisable dans une base de vecteurs propres $(v_1, v_2, v_3)$ et dans notre cas, $|\lambda_1| < 1$, de même que $|\lambda_2| < 1$.

Il en résulte que

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \alpha_0 1^n v_1 + \beta_0 \lambda_1^n v_2 + \gamma_0 \lambda_2^n v_3.$$

D'où quand $t \to +\infty$, on a $\begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} \to \alpha_0 v_1$

**Solutions des exercices**

**Exercice 1.**

**1)** Si $A$ et $B$ sont semblables, il existe une matrice de passage $P$ telle que $B = P^{-1}AP$. Si $A$ est inversible, il existe $A^{-1}$ et dans ce cas, $P^{-1}A^{-1}P$ est la matrice inverse de $B$.

**2)** Avec les mêmes notations, $B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A\cancel{PP^{-1}}A\cancel{PP^{-1}}...\cancel{PP^{-1}}AP = P^{-1}A^kP$.

**Exercice 2.**

$A^{-1}B = A^{-1}(BA^{-1})A$.

**Exercice 3.**

En effet, si $u \in V_\lambda \cap V_\mu$, alors $\varphi(u) = \lambda u$ et $\varphi(u) = \mu u$, donc $\mu u = \lambda u$. Or $\lambda \neq \mu$, donc $u = 0_E$.

**Exercice 5.**

Si $\lambda \in \text{Spec}(A)$, alors pour un vecteur propre associé $u$, on a $A.u = \lambda u$, donc $BP^{-1}.u = P^{-1}APP^{-1}.u = P^{-1}A.u = P^{-1}.\lambda u = \lambda P^{-1}.u$ et $P{-}1.u$ est un vecteur propre associé à $\lambda$ pour $B$.

**Exercice 6.**

Il suffit de calculer le polynôme caractéristique en développant par rapport aux colonnes si elle est triangulaire supérieure et par rapport aux lignes sinon. On obtient alors le produit des termes diagonaux qui sont tous de la forme $X - a_{ii}$, d'où le résultat.

**Exercice 7.**

**1)** On trouve $P_A(X) = (1-X)(3-X)(-1-X)$ donc $\text{Spec}(A) = \{-1; 1; 3\}$. Trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable. Et la recherche des vecteurs propres associés donne $v_{-1} = {}^t(1, 0, 1)$, $v_1 = {}^t(0, 1, 1)$ et $v_3 = {}^t(-1, 1, 1)$. D'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2)** On trouve $P_B(X) = -X(1-X)^2$ donc $\text{Spec}(B) = \{0; 1\}$. Deux valeurs propres distinctes, il faut déterminer les sous-espaces propres pour voir s'ils sont bien de dimension maximale. La recherche des vecteurs propres associés donne $v_0 = {}^t(1, 1, 1)$ et pour $\lambda = 1$, le sous-espace propres est de dimension 2 engendré par $v_1 = {}^t(0, -2, 1)$ et $v_1' = {}^t(1, 2, 0)$. D'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

**3)** On trouve $P_C(X) = -X(1-X)(2-X)$ donc $\text{Spec}(C) = \{0; 1; 2\}$. Trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable. Et la recherche des vecteurs propres associés donne $v_0 = {}^t(1, 1, 1)$, $v_1 = {}^t(1, 2, 1)$ et $v_2 = {}^t(-1, 1, 1)$. D'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**4)** On trouve $P_D(X) = (-1-X)(1-X)^2$ donc $\text{Spec}(D) = \{-1; 1\}$. Deux valeurs propres distinctes comme pour $B$, mais celle-ci n'est pas diagonalisable car le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1 engendré par $v_1 = {}^t(-1, 2, 1)$. Pour info, vecteur propre associé à $-1$ : $v_{-1} = {}^t(2, -1, 1)$.

**Exercice 8.**

On pose $A = 2I + J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

En utilisant le fait que $I$ et $J$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : Donc $A^n = (2I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-k}\binom{n}{k} I^{n-k} J^k$. De ce qui précède, on a $J^k = 0$ dès que $k \geq 3$. Donc

$$A^n = 2^n\binom{n}{0}I + 2^{n-1}\binom{n}{1}J + 2^{n-2}\binom{n}{2}J^2 = \begin{pmatrix} 2^n & -2^{n-1}n & \overbrace{3 \times 2^{n-1}n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2^{n-2}}^{(n^2+11n)2^{n-3}} \\ 0 & 2^n & -2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

**Exercice 9.**

On a déjà trouvé une base dans laquelle la matrice est diagonale. En effet,

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ on a } D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1}A^nP = D^n$ en simplifiant les $P^{-1}P = I$ et

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ -3^n + 2^n & -3^n + 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

**Exercice 10.**

On cherche un polynôme annulateur. On sait que le polynôme caractéristique est de degré 3. On calcule donc $A^3$, puis $A^2$ et on résout le système $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I = 0$. On trouve que le polynôme $P_A(X) = -X^3 - 6X^2 + 8X - 1$ est annulateur. Donc on a

$$A^3 - 6A^2 + 8A - I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^3 - 6A^2 + 8A = I \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(A^2 - 6A + I)}_{A^{-1}} A = I$$

On a déjà exploité cette astuce. Voyons comment l'utiliser pour les (petites) puissances :

$$\begin{aligned} A^5 &= A^2 \times A^3 = A^2 \times (6A^2 - 8A + I) = 6A \times A^3 - 8A^3 + A^2 \\ &= 6A(6A^2 - 8A + I) - 8(6A^2 - 8A + I) + A^2 = 36A^3 - 95A^2 + 70A - 8I \\ &= 36(6A^2 - 8A + I) - 95A^2 + 70A - 8I \\ &= 121A^2 - 218A + 28I \end{aligned}$$

en utilisant $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, ou trouve $A^5 = \begin{pmatrix} 584 & 387 & 629 \\ 242 & 173 & 290 \\ 387 & 266 & 439 \end{pmatrix}$.

**Exercice 11.**

Il suffit d'écrire le déterminant menant au polynôme caractéristique et de faire la somme des colonnes pour mettre $(X-1)$ en facteur.