C13-Quiz

Exercice 1. Si f est une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E, rappeler l'expression de $f(X, Y)$ en fonction de la matrice associée.

Exercice 2. 𝅘𝅥𝅯 Rappeler la définition d'une forme quadratique associée à une forme bilinéaire.

Exercice 3. ♬ Donner la formule permettant de retrouver la forme bilinéaire à partir de la forme quadratique associée.

Exercice 4. 𝅘𝅥𝅯 Quelle est la définition d'une forme bilinéaire non dégénérée ?

Exercice 5. ♪ Quelle est la définition d'une forme bilinéaire définie ?

Exercice 6. ♬ Qu'appelle-t-on un vecteur isotrope ?

Exercice 7. 𝅘𝅥𝅯 Quelle implication est vraie ? "définie $\Rightarrow$ dégénérée" ou "dégénérée $\Rightarrow$ définie" ?

Exercice 8. ♪ Qu'est-ce qu'une décomposition de Gauss d'une forme quadratique ?

Exercice 9. ♪ Quel lien existe-t-il entre le fait qu'une forme bilinéaire soit définie positive et la matrice correspondante ?

Exercice 10. ♪ Dans l'algorithme de décomposition de Gauss d'une forme quadratique, par quoi doit-on commencer

- si $a_{ii} \neq 0$...
- si $a_{ii} = 0 \ \forall i$ et $a_{ij} \neq 0$...

Exercice 11. ♬ Quelle est la définition d'un produit scalaire ?

Exercice 12. ♪ Citer l'inégalité triangulaire.

Exercice 13. ♪ Quelle est l'inégalité de Cauchy-Schwartz ?

Exercice 14. ♬ Qu'appelle-t-on un espace vectoriel euclidien ?

Exercice 15. ♪ Donner la définition de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Exercice 16. 𝅘𝅥𝅯 Que dire de la somme d'un sous-espace vectoriel et son orthogonal ?

Exercice 17. ♩ Sauriez-vous appliquer le processus d'orthonormalisation de Schmidt au sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 2, -1, 1)$ et $v = (1, 0, 1, 1)$?

Réponses

Exercice 1 : $f(X,Y) = {}^tXAY$
Exercice 2 : $Q(X) = f(X,X) = {}^tXAX$.
Exercice 3 : $f(X,Y) = \frac{1}{2}[q(X+Y) - q(X) - q(Y)]$.
Exercice 4 : Une forme bilinéaire est dite **non dégénérée** si $\text{rg}(A) = n$, i.e. A est inversible.
Une forme bilinéaire est dite **définie** s'il n'existe pas de $X \neq 0_E$ tel que $q(X) = 0$.
Exercice 5 : Une forme bilinéaire est dite **définie** s'il n'existe pas de $X \neq 0_E$ tel que $q(X) = 0$.
Exercice 6 : Dans le cas où la forme bilinéaire n'est pas définie, un vecteur X tel que $q(X) = 0$ est appelé **vecteur isotrope**.
Exercice 7 : "définie $\Rightarrow$ dégénérée".
Exercice 8 : $q(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$.

Exercice 9 : Ses valeurs propres sont strictement positives. (positives ou nulles dans le cas d'une forme semi-définie positive).
Exercice 10 : • S'il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$, alors

$$q(X) = \frac{1}{a_{ii}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i} \right)^2 + \dots$$

• Si pour tout i, on a $a_{ii} = 0$ et s'il existe (i, j) tel que $a_{ij} \neq 0$, alors

$$q(X) = \frac{1}{2a_{ij}} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right)^2 \right] + \dots$$

Exercice 11 : Il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Exercice 12 : $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$.
Exercice 13 : $| < X, Y > | \leq ||X|| \times ||Y||$
Exercice 14 : Il s'agit d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exercice 15 : $F^{\perp} = \{X \in E \backslash \ \forall Y \in F, \ <X, Y> = 0\}$.
Exercice 16 : Elle est directe. En fait, ils sont même supplémentaires.
Exercice 17 : On pose $\varepsilon_1 = u$ et on cherche $\varepsilon_2 = \alpha u + \beta v$ tel que $<\varepsilon_1, \varepsilon_2> = 0$. Ainsi, on sera assuré que ε_2 est orthogonal à ε_1 et qu'il est dans F. En fait, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sera une base orthogonale de F.
On résout donc $<\varepsilon_1, \varepsilon_2> = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7\alpha + \beta = 0$. On peut prendre $(\alpha, \beta) = (-1, 7)$, ce qui donne $\varepsilon_2 = (6, -2, 8, 6)$.
Pour finir, si l'on veut une base orthonormale, on normalise en calculant les normes via la norme considérée (ici la norme euclidienne classique) : $||\varepsilon_1|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{7}$ et $||\varepsilon_2|| = 2\sqrt{35}$.
D'où une base orthonormée : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{35}}(6, -2, 8, 6)$.