Formes quadratiques et espaces euclidiens

Leçon 13
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

Résumé

Dans ce chapitre, on s'attache surtout à décrire l'algorithme de Gauss de décomposition des formes quadratiques. On fait aussi le minimum syndical concernant les espaces euclidiens.

Table des matières

I Formes bilinéaires.

Définition 13.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Une **forme bilinéaire** f sur E est une application de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque variable. i.e.*

- $f(\alpha X + \beta X', Y) = \alpha f(X, Y) + \beta f(X', Y)$,
- $f(X, \alpha Y + \beta Y') = \alpha f(X, Y) + \beta f(X, Y')$.

Exercice 1. ♪

Prouvez qu'une conséquence directe est que $f(\alpha X + \beta X', \gamma Y + \delta Y') = \alpha\gamma f(X, Y) + \alpha\delta f(X, Y') + \beta\gamma f(X', Y) + \beta\delta f(X', Y')$.

Interprétation matricielle : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si on prend deux vecteurs X et Y de E, on a $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $Y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. D'où

$$f(X, Y) = \sum_{i,j} x_i y_j f(e_i, e_j)$$

Si on note $f(e_i, e_j) = a_{ij}$ et $A = (a_{ij})$ ce que nous appellerons la **matrice de la forme bilinéaire** dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\boxed{f(X, Y) = {}^t X A Y}\ .$$

Définition 13.2 *Le **rang d'une forme bilinéaire** est le rang de la matrice associée. Il est indépendant du choix de la base.*

D'ailleurs, voyons de plus près comment agit un changement de base : Soit $\mathcal{B}'$ une nouvelle base de l'espace E et $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On note X et Y deux vecteurs dans l'ancienne base et naturellement X' et Y' dans la nouvelle. On a alors

$$X = PX'$$
$$Y = PY'$$

Ainsi, ${}^tXAY = {}^t(PX')APY' = {}^tX'{}^tPAPY'$.

Donc $\boxed{{}^tPAP}$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

On dit que les deux matrices A et ${}^tPAP$ sont **congruentes**.

Définition 13.3 *Une forme bilinéaire est dite* ***symétrique*** *si*

$$\forall (X,Y) \in E^2 \quad f(X,Y) = f(Y,X).$$

Une forme bilinéaire est dite ***antisymétrique*** *si*

$$\forall (X,Y) \in E^2 \quad f(X,Y) = -f(Y,X).$$

Exercice 2. ♪

Montrer que si f est symétrique, alors ${}^tA = A$.

II Formes quadratiques.

Définition 13.4 *Soit f une forme bilinéaire sur E, On appelle forme quadratique associée à f l'application*

$$q : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & f(X,X) \end{array}$$

On a alors l'écriture matricielle $\boxed{{}^tXAX}$.

Une question légitime est : Réciproquement, étant donnée une forme quadratique, est-on capable de retrouver la forme bilinéaire associée ?

Il suffit de développer le calcul suivant :

$$q(X+Y) = f(X+Y, X+Y) = f(X,X) + f(X,Y) + f(Y,X) + f(Y,Y)$$

en supposant que f est symétrique, on obtient $q(X+Y) = q(X) + 2f(X,Y) + q(Y)$ et donc

$$\boxed{f(X,Y) = \frac{1}{2}[q(X+Y) - q(X) - q(Y)]}\ .$$

Il existe donc une unique forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique.

Autre méthode : On peut aussi utiliser la formule :

$$f(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i}(X) \times y_i.$$

Exemple: Avec $q(X) = x_1^2 - 2x_1x_2$, on trouve

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} = -2x_1$$

d'où $f(X,Y) = (x_1 - x_2)y_1 - x_1y_2 = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2$ et si $q(X) = {}^tXAX$, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 13.5 *Avec les notations précédentes, une forme bilinéaire est dite* ***non dégénérée*** *si $rg(A) = n$, i.e. A est inversible.*

Une forme bilinéaire est dite ***définie*** *s'il n'existe pas de $X \neq 0_E$ tel que $q(X) = 0$.*

Définition 13.6 *Dans le cas où la forme bilinéaire n'est pas définie, un vecteur X tel que $q(X) = 0$ est appelé* ***vecteur isotrope****.*

Théorème 13.7 *Si f est définie, alors f est non dégénérée.*

Attention ! La réciproque est fausse.

Exemple: On pose $f(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. On a alors $q(X) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Or $\det(A) = -1 \neq 0$, donc f n'est pas dégénérée, mais en revanche, $q(1,0,1) = 0$ et $(1,0,1)$ est un vecteur isotrope et f est non définie.

Définition 13.8 *Une forme quadratique q est dite* ***positive*** *(resp.* ***négative****) si $\forall X \in E$, on a $q(X) \geq 0$ (resp. $q(X) \leq 0$).*
Une forme quadratique q est dite ***définie positive*** *(resp.* ***définie négative****) si $\forall X \in E\{0_E\}$, on a $q(X) > 0$ (resp. $q(X) < 0$).*
Une forme quadratique q est dite ***semi définie positive*** *(resp.* ***semi définie négative****) si $\forall X \in E$, on a $q(X) \geq 0$ et $\exists X \in E \backslash \{0_E\}$ tel que $q(X) = 0$. Autrement dit, f est positive mais il existe un vecteur isotrope. Idem pour semi-négative.*

III Décomposition de Gauss.

Définition 13.9 *Une forme quadratique est dite* ***canonique*** *si pour tout $i \neq j$, on a $a_{ij} = 0$. On a alors*

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2.$$

Le nombre de coefficient a_{ii} non nuls est le rang de q. On appelle ***signature*** *de q le couple (nombre de $a_{ii} > 0$, nombre de $a_{ii} < 0$).*

Exercice 3. ♩

Quelles sont les signatures de

1) $q_1(x,y,z) = (x+y)^2 + y^2$,

2) $q_2(x,y,z,t) = x^2 - 7y^2 + 2t^2 + y^2$,

3) $q_3(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)^2 - 2x^2 - 2y^2$,

4) $q_4(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$.

Pour résumer un peu : Si la signature d'une forme quadratique φ définie sur un espace de dimension n est (p,q), alors on a

- φ est dégénérée si et seulement si $p + q < n$.
- φ est définie si et seulement si $p = n$ (auquel cas elle est positive) ou $q = n$ et elle est négative).
- φ est semidéfinie si et seulement si $p = 0$ ou $q = 0$ et $p + q < n$.

Théorème 13.10 *Toute forme quadratique peut être réduite à la forme canonique en prenant comme nouvelle base une base orthonormée formée de vecteurs propres de A, la matrice symétrique associée à q. On a alors*

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$$

où les λ_i sont les valeurs propres (distinctes ou non) et (x_i') les coordonnées de X dans la nouvelle base.

Exemple: On pose $q(X)=2x_1x_2-2x_1x_3$. On a alors $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique donne $P_A(X)=\det(A_XI)=-X(X^2-2)$. Le spectre est alors $\mathrm{Spec}(A)=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$. On peut donc trouver une base de vecteurs propres.

Par le calcul, on trouve $v_{-\sqrt{2}}=(-\sqrt{2},1,-1)$, $v_0=(0,1,1)$ et $v_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2},1,-1)$. On remarque que les vecteurs sont tous orthogonaux.

On normalise les vecteurs car $||v_{-\sqrt{2}}||=2$, $||v_0||=\sqrt{2}$ et $||v_{\sqrt{2}}||=2$. On obtient alors

$$v'_{-\sqrt{2}}=(\tfrac{-\sqrt{2}}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{-1}{2}),\ v'_0=(0,\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2})\text{ et }v'_{\sqrt{2}}=(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{-1}{2})$$

La base $\{v'_{-\sqrt{2}},v'_0,v'_{\sqrt{2}}\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage est

$$\begin{pmatrix}\dfrac{-\sqrt{2}}{2}&0&\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\dfrac{1}{2}&\dfrac{\sqrt{2}}{2}&\dfrac{1}{2}\\\dfrac{-1}{2}&\dfrac{\sqrt{2}}{2}&\dfrac{-1}{2}\end{pmatrix}\text{ et }P^{-1}={}^tP\text{ (cas d'une matrice de vecteurs orthonormaux)}$$

Donc

$$B={}^tPAP=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&0&0\\0&0&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\text{ et }q(X)={}^tX'BX'=-\sqrt{2}x_1'^2+\sqrt{2}x_3'^2.$$

Or $X=PX'$, d'où

$$X'=P^{-1}X={}^tPX=\begin{pmatrix}\dfrac{-\sqrt{2}}{2}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{-1}{2}\\0&\dfrac{\sqrt{2}}{2}&\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{-1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-\sqrt{2}}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{-1}{2}x_3\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_3\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{-1}{2}x_3\end{pmatrix}$$

et $q(X)=-\sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{-1}{2}x_3\right)^2+\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{-1}{2}x_3\right)^2.$

Remarque: On a donc une nouvelle façon d'écrire la définition précédente :

Définition 13.11 *Une forme bilinéaire est dite* ***définie positive*** *si et seulement si les valeurs propres sont strictement positives.*
Elle est dite semi-définie positive si et seulement si les valeurs propres sont positives.

Remarque: Il existe une infinité de bases où la matrice de f est diagonale sans que les termes diagonaux soient les valeurs propres, mais dans chacune d'elles, le nombre de valeurs propres positives (resp. négatives ou nulles) est conservé.

Théorème 13.12 *Si le rang de la forme quadratique est r, alors il existe r formes linéaires indépendantes $\omega_i(X)$ telles que*

$$\boxed{q(X)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\omega_i^2(X)}\ .$$

Méthode : • S'il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$, alors

$$q(X) = \frac{1}{a_{ii}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i} \right)^2 + \dots$$

• Si pour tout i, on a $a_{ii} = 0$ et s'il existe (i, j) tel que $a_{ij} \neq 0$, alors

$$q(X) = \frac{1}{2a_{ij}} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right)^2 \right] + \dots$$

Attention ! Dans cette formule, a_{ij} n'est pas le coefficient en $x_i x_j$, mais la moitié car il s'agit du coefficient de la matrice. Ainsi, quand on divise par $2a_{ij}$, on divise bien par le coefficient de $x_i x_j$.

Exemples: a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2$.
On a $a_{22} \neq 0$, donc

$$q(X) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_2} \right)^2 + \dots = (x_1 + x_2)^2 \underbrace{-x_1^2 + 2x_1x_3}_{q_1(x_1, x_3)}$$

et on recommence avec q_1. On obtient $q_1(x_1, x_3) = -(-x_1 + x_3)^2 + x_3^2$. D'où

$$q(X) = (x_1 + x_2)^2 - (-x_1 + x_3)^2 + x_3^2.$$

On a trois formes linéaires indépendantes, donc le rang est 3 et la signature est $(2; 1)$.

b) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.
ici, tous les a_{ii} sont nuls, mais $a_{12} = a_{21} \neq 0$. De plus, $\dfrac{\partial q}{\partial x_1}(X) = 2x_2 - 2x_3$ et $\dfrac{\partial q}{\partial x_2}(X) = 2x_1$, donc

$$q(X) = \frac{1}{2} \left[(x_2 - x_3 + x_1)^2 - (x_2 - x_3 - x_1)^2 \right]$$

Le rang est donc 2 et la signature est $(1; 1)$.

Exercice 4.

Décomposer en sommes de carrés les formes quadratiques suivantes, donner les signatures, dites si elles sont définies, positives :

1) $q_1(X) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$
2) $q_2(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
3) $q_3(X) = 5x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$
4) $q_4(X) = x_1x_2 + x_1x_3$.

IV Espaces vectoriels euclidiens.

Définition 13.13 *On appelle* ***produit scalaire*** *sur un espace vectoriel E toute forme bilinéaire symétrique définie positive. On le note souvent*

$$(X|Y) \quad ou \quad < X, Y >.$$

On définit ainsi une norme sur E avec $||X|| = \sqrt{(X|X)}$.

Exercice 5. ♩
Montrer que sur $\mathbb{R}^n$, la forme $(X,Y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est bien un produit scalaire.

Exercice 6. ♩
Idem avec $(f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$.

Proposition 13.14 *Pour tout $X \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

i. $||X|| \geq 0$.
ii. $||X|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0$.
iii. $||\lambda X|| = |\lambda| \times ||X||$.
iv. $| < X,Y > | \leq ||X|| \times ||Y||$ *(Cauchy-Schwartz).*
v. $||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition 13.15 *Un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est un* ***espace vectoriel euclidien****.*

Définition 13.16 *On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $< X,Y >= 0$.*
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle ***orthogonal*** *de F le sous espace vectoriel :*

$$F^{\perp} = \{X \in E \backslash \ \forall Y \in F, \ < X,Y >= 0\}$$

Théorème 13.17 *Dans un espace vectoriel euclidien, un sous-espace vectoriel et son orthogonal sont supplémentaires.*

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Théorème 13.18 *Dans un espace vectoriel euclidien de dimension n, toute famille de n vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux est libre.*

Démonstration: $< \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n, u_j >= \lambda_j ||u_j||^2 = 0$ Donc $\lambda_j = 0$ pour tout j.

□

Définition 13.19 *On appelle* ***base orthonormée*** *toute famille de n vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux et normés.*

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt : On prend un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, noté $F = \text{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,2,-1,1)$ et $v = (1,0,1,1)$. On pose $\varepsilon_1 = u$ et on cherche $\varepsilon_2 = \alpha u + \beta v$ tel que $< \varepsilon_1, \varepsilon_2 >= 0$. Ainsi, on sera assuré que ε_2 est orthogonal à ε_1 et qu'il est dans F. En fait, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sera une base orthogonale de F.

On résout donc $< \varepsilon_1, \varepsilon_2 >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7\alpha + \beta = 0$. On peut prendre $(\alpha, \beta) = (-1, 7)$, ce qui donne $\varepsilon_2 = (6, -2, 8, 6)$.

Pour finir, si l'on veut une base orthonormale, on normalise en calculant les normes via la norme considérée (ici la norme euclidienne classique) : $||\varepsilon_1|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{7}$ et $||\varepsilon_2|| = 2\sqrt{35}$.

D'où une base orthonormée : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{2\sqrt{35}}(6,-2,8,6)$.

Si on veut maintenant travailler sur l'orthogonal de F, on peut trouver un système d'équations satisfaisant $F^{\perp}$: Les vecteurs de $F^{\perp}$ doivent être orthogonaux à une base de F :

$$\begin{cases} <(x,y,z,t),(1,2,-1,1)>=0 \\ <(x,y,z,t),(6,-2,8,6)>=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 3x-y+4z+3t=0 \end{cases}.$$

Exemple: On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2. Ici, on se cantonnera à l'intervalle $[0,1]$. On pose donc $(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Déterminons une base orthonormale.

- On part d'une base. On a $(1,X,X^2)$ qui est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- On commence par normaliser le premier vecteur en le divisant par sa norme. Ici,

$$||1||^2=\int_0^1 1dt=1$$

bon ben y'avait pas grand chose à faire en fait à cette étape et on pose $\boxed{\varepsilon_1=1}$.

- On cherche un deuxième vecteur qui soit à la fois normal et orthogonal à ε_1. On le prend de la forme $\varepsilon_2=\lambda\varepsilon_1+X$.

On fait en sorte tout d'abord qu'il soit orthogonal à ε_1

$$<\varepsilon_2',\varepsilon_1>=\int_0^1(\lambda+X)dX=\left[\lambda X+\frac{X^2}{2}\right]_0^1=\lambda+\frac{1}{2}.$$

On pose donc $\lambda=\frac{-1}{2}$. Maintenant qu'on est sur une droite orthogonale à ε_1, on normalise $\varepsilon_2'=\frac{-1}{2}\varepsilon_1+X$.

$$||\varepsilon_2'||^2=\int_0^1\left(\frac{-1}{2}+X\right)^2dX=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}+X\right)^3\right]_0^1=\frac{1}{12}=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2.$$

d'où $\varepsilon_2=2\sqrt{3}\varepsilon_2'=\boxed{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}X}$.

- Fidèle à notre stratégie, on cherche un vecteur orthogonal à ε_1 et à ε_2, puis on le normalise. On pose $\varepsilon_3'=\lambda\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2+X^2$.

$$\begin{aligned} <\varepsilon_1,\varepsilon_3'>=0 &\Leftrightarrow <\varepsilon_1,\lambda\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2+X^2>=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda\underbrace{<\varepsilon_1,\varepsilon_1>}_{1}+\mu\underbrace{<\varepsilon_1,\varepsilon_2>}_{0}+<\varepsilon_1,X^2>=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda+\int_0^1 X^2dX=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda=\frac{-1}{3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} <\varepsilon_2,\varepsilon_3'>=0 &\Leftrightarrow <\varepsilon_2,\lambda\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2+X^2>=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda\underbrace{<\varepsilon_2,\varepsilon_1>}_{0}+\mu\underbrace{<\varepsilon_2,\varepsilon_2>}_{1}+<\varepsilon_2,X^2>=0 \\ &\Leftrightarrow \mu+\int_0^1(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}X)X^2dX=0 \\ &\Leftrightarrow \mu=\left[\frac{\sqrt{3}X^3}{3}-\frac{\sqrt{3}X^4}{2}\right]_0^1 \\ &\Leftrightarrow \mu=\frac{-\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Ainsi, $\varepsilon_3' = \dfrac{-1}{3}\varepsilon_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\varepsilon_2 + X^3 = \dfrac{1}{6} - X + X^2$ est orthogonal à ε_1 et à ε_2. On est donc assuré d'être sur la normale au $\text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Il ne reste plus qu'à normaliser :

$$||\varepsilon_3'|| = \int_0^1 \left(\frac{1}{6} - X + X^2\right)^2 dX = \int_0^1 \left(\frac{1}{36} - \frac{-X}{3} + \frac{4X^2}{3} - 2X^3 + X^4\right) dX = \frac{1}{180} = \left(\frac{1}{6\sqrt{5}}\right)^2.$$

d'où $\varepsilon_3 = 6\sqrt{5}\varepsilon_3' = \boxed{6\sqrt{5}X^2 - 6\sqrt{5}X + \sqrt{5}}$.