C14-Quiz

Exercice 1. 𝅘𝅥𝅯 Donner les définitions des normes euclidiennes, uniforme et de la norme 1.

Exercice 2. ♬ Comment définit-on une distance à partir d'une norme ?

Exercice 3. ♪ Définir la boule ouverte de centre A et de rayon r.

Exercice 4. ♬ Qu'appelle-t-on un voisinage de A ?

Exercice 5. ♪ Comment définir la continuité d'une fonction f en A quand elle est multivariable ?

Exercice 6. ♪ Rappeler l'inégalité fondamentale qui permet de déterminer si une fonction est continue dans la plupart des cas.

Exercice 7. 𝅘𝅥𝅯 Quelle est la définition du gradient de f en A ?

Exercice 8. ♪ Compléter cette assertion : "Si f possède des dérivées partielles continues en A, alors ..."

Exercice 9. ♪ Rappeler la formule du DL à l'ordre 1 en A de f.

Exercice 10. ♪ Donner la définition de la différentielle de f en A.

Exercice 11. ♪ Quand dit-on qu'une différentielle est exacte ?

Exercice 12. ♪ Donner la formule de Taylor-Young (du DL de f en A à l'ordre 2).

Exercice 13. ♪ Qu'appelle-t-on la matrice hessienne de f en A ?

Réponses

Exercice 1 : • La **norme euclidienne** : $||X||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

• La **norme** 1 : $||X||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

• La **norme uniforme** : $||X||_\infty = \max_i |x_i|$.

Exercice 2 : $d(X, Y) = ||X - Y||$.

Exercice 3 : $\mathcal{B}_o = \{X \in E \backslash\ ||X - A|| < r\}$.

Exercice 4 : Il s'agit d'un sous-ensemble de l'espace, contenant une boule ouverte centrée en A.

Exercice 5 : Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite **continue** en A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \quad ||X - A|| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(X) - f(A)| < \varepsilon.$$

Exercice 6 : $2|xy| \leq ||(x, y)||^2$.
Exercice 7 : $\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)$.
Exercice 8 : ... f est continue en A.
Exercice 9 : $f(A + H) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \times h_i + ||H||\varepsilon(H) ==$
$f(A) + < \operatorname{grad} f(A), H > + ||H||\varepsilon(H)$.
Exercice 10 : L'application

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \times h_i \end{aligned}$$

est appelée **différentielle** de f en A.
Exercice 11 : S'il existe une fonction f telle qu'elle soit égale à df.
Exercice 12 : $f(A + H) = f(A) + < \operatorname{grad} f(A), H >$
$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) h_i h_j + ||H||^2 \varepsilon(H)$.

Exercice 13 : La matrice des dérivées partielles secondes.
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$$