# Fonctions de plusieurs variables

Leçon 14
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

**Résumé**

Dans ce chapitre, on parle de normes avec pour but la continuité et la différentiabilité d'une fonction à plusieurs variables. l'objectif est de constituer un petit bagage afin d'aborder les extrema dans la leçon qui suit.

## Table des matières



## I Les normes.

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{R}$. (On peut imaginer qu'il s'agit de $\mathbb{R}^n$). On peut y définir plusieurs normes via les produits scalaires, les plus classiques étant :

• La **norme euclidienne** : $||X||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

• La **norme** 1 : $||X||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

• La **norme uniforme** : $||X||_\infty = \max_i |x_i|$.

Toutes ces normes sont équivalentes (on peut même montrer que dans un espace de dimension fini, toutes les normes sont équivalentes). L'existence d'une norme fournit une distance :

$$d(X,Y) = ||X-Y||.$$

Une notion plus faible a priori (car elle ne nécessite pas de norme dans le cas général) est la notion de topologie qui n'a besoin que d'ouverts dans l'espace considéré. Quand on a une norme, c'est beaucoup plus facile car on peut définir des boules :

• La **boule ouverte** de centre $A$ et de rayon $r$ :

$$\mathcal{B}_o = \{X \in E \backslash\ ||X-A|| < r\}.$$

• La **boule fermée** de centre $A$ et de rayon $r$ :

$$\mathcal{B}_f = \{X \in E \backslash\ ||X-A|| \leq r\}.$$

**Définition 14.1** *On appelle **voisinage** de $A$ une partie de l'espace contenant une boule ouverte de centre $A$.*

# II Continuité

**Définition 14.2** *Une fonction $f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite **continue** en $A$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \quad ||X - A|| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(X) - f(A)| < \varepsilon.$$

*Exemple:* Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}^n$, de même que les fractions rationnelles sur leur ensemble de définition.

**Exercice 1.**

Montrer que la somme de deux fonctions continues en $A$ est continue en $A$. (on pourra se servir de l'inégalité triangulaire).

Et pour les plus courageux, faire de même avec le produit et le quotient.

*Exemple:* On va montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour la continuité de la fonction $f$, on procède comme d'habitude :

• Soit elle est continue et on procède par majoration pour trouver la limite. En effet, on ne sait pas faire de limite en deux variables : si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ a un sens évident, rien n'indique comment le traiter. C'est pour cela que l'on préfère se ramener à des limite sur $\mathbb{R}$ en considérant les normes et donc les boules (ici des disques) concentriques autour du point considéré. On majore donc par une norme, souvent avec la même astuce : passage à la valeur absolue, inégalité triangulaire si besoin et éventuellement, utilisation de l'inégalité :

$$2|xy| \leq x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{2|xy| \leq ||(x,y)||^2}\ .$$

Ici, on a

$$|f(x,y)| \leq \frac{\frac{1}{2}||(x,y)||^2}{||(x,y)||^2}$$

Malheureusement, la majoration ne permet pas de conclure car la limite de la majoration n'est pas nulle.

• Soit elle n'est pas continue. Il suffit alors de trouver deux chemins qui donnent deux limites différentes (la continuité impliquant que toutes les limites directionnelles sont les mêmes).

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,2x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}.$$

La fonction n'est pas continue en $(0,0)$.

**Exercice 2.**

Qu'en est-il de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \ ?$$

## III Dérivées partielles d'ordre 1

**Définition 14.3** *Soit $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$. On dit qu'elle admet une* ***dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à** $x_i$ **au point*** $A = (a_1, \ldots, a_n)$ *si*

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}$$

*existe et est finie.*
*Cette limite est notée* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ *(ou* $f'_{x_i}(A)$*).*

Les règles de dérivation sont les mêmes que dans le cas réel classique.

*Exemple:* On va montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ vue plus haut et définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

possède des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ malgré le fait qu'elle ne soit pas continue en $(0, 0)$. Pour l'existence des dérivées partielles, aucun problème en dehors de $(0, 0)$ car il s'agit d'une fraction rationnelle qui est dérivable partout où le dénominateur ne s'annule pas.

En $(0, 0)$, on étudie l'existence des dérivées partielles. Or $f(x, 0) - f(0, 0) = 0$ et donc le taux est nul suivant $x$ et la limite existe et vaut 0. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. On fait de même pour la dérivée par rapport en $y$ par symétrie.

En revanche, ces dérivées partielles ne sont pas continues.

**Définition 14.4** *Avec les mêmes conditions et sous réserve de condition d'existence, on définit le* ***gradient*** *de $f$ en $A$ par*

$$grad\, f(A) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right)$$

**Définition 14.5** *Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit que $f$ est* ***de classe $\mathcal{C}^1$ sur*** *$\Omega$ si $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues sur $\Omega$.*

*Remarque:* • Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$, alors $f$ est continue sur $\Omega$.

• Les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Idem pour les fractions rationnelles sur tout ouvert de leur ensemble de définition.

• Somme et produit de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.

• Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ et si $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.

**Proposition 14.6** *Si $f$ possède des dérivées partielles continues en $A$, alors $f$ est continue en $A$.*

**Attention !** La réciproque est fausse.

# IV Différentiabilité

**Théorème 14.7** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ et $A \in \Omega$.*

*Il existe une fonction $\varepsilon$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{H \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(H) = 0$ vérifiant pour tout $H = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $A + H \subset \Omega$,*

$$\begin{aligned} f(A+H) &= f(A) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \times h_i + ||H||\varepsilon(H) \\ &= f(A) + < grad\, f(A), H > + ||H||\varepsilon(H). \end{aligned}$$

*On obtient un DL d'ordre 1 au voisinage de $A$.*

Il faut rapprocher ce résultat de la définition du nombre dérivée pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
En effet, on a, si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable en $a$ l'existence d'une fonction $\varepsilon$ de limite nulle en $a$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h).$$

**Définition 14.8** *L'application*

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \times h_i \end{aligned}$$

*est appelée **différentielle** de $f$ en $A$.*

*On note souvent $H = (h_1, \dots, h_n) = (dx_1, \dots, dx_n)$.*

*Remarques:* • Cette application différentielle est linéaire et c'est une forme. • Le théorème précédente montre qu'une fonction qui admet des dérivées partielles continues admet une différentielle.

**Définition 14.9** *Une forme différentielle $\omega$ est dite **exacte** s'il existe une fonction $f$ telle que $df = \omega$.*

*Remarque:* Dans le cas d'une forme différentielle de la forme $\omega = Pdx + Qdy$ (où $P$ et $Q$ sont deux fonctions de $x$ et $y$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$), on a

$$\omega \text{ exacte si et seulement si } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Exercice 3.**
La forme $\omega = (cosx + 3x^2y)dx + (x^3 - y^3)dy$ est-elle exacte ?

# V Calcul différentiel d'ordre 2

**Définition 14.10** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $A \in \Omega$. Soit $f$ une fonction définie sur $\Omega$ admettant des dérivées partielles d'ordre 1 au voisinage de $A$.*

*On dit que $f$ admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 par rapport à $x_i$ et $x_j$ en $A$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $x_i$ en $A$. On la note*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) \text{ ou } f''_{x_i x_j}(A).$$

*Remarque:* Les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Les fractions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout ouvert inclus dans leur ensemble de définition.

**Théorème 14.11** *(Schwartz) Soient $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $A \in \Omega$. Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en $A$ alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)$$

**Théorème 14.12** *(Formule de Taylor-Young) Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A \in \Omega$ et $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$. Il existe une fonction $\varepsilon$ de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{H \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(H) = 0$ vérifiant pour tout $H \in \mathbb{R}^n$ tel que $A+H \in \Omega$ :*

$$f(A+H) = f(A) + < grad\, f(A), H > + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) h_i h_j + ||H||^2 \varepsilon(H).$$

*On obtient un DL à l'ordre 2 au voisinage de $A$.*

**Exercice 4.**
Déterminer un DL à l'ordre 2 de $f : (x, y) \longmapsto e^x \sin y$ en $A = (0, 0)$.

**Définition 14.13** *On appelle* ***hessien***[a] *de $f$ en $A$ la matrice*

$$Hess\ f(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(A) & \dots & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(A) \end{pmatrix}$$

*a.* Le terme hessien vient du mathématicien James Sylvester (1814-1899) en hommage au mathématicien allemand Ludwig Otto Hesse (1811-1874)

*Remarque:* Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$, alors Hess $f(A)$ est symétrique.