

---

# Recherche d'extrema

Leçon 15  
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux  
Thierry Sageaux.

---

## Résumé

La plupart des problèmes impliquant des fonctions de plusieurs variables amènent à la recherche des extrema.

## Table des matières

|                                                     |   |
|-----------------------------------------------------|---|
| I Définition.                                       | 1 |
| II Extrema sans contraintes                         | 1 |
| III Extrema sous contraintes                        | 3 |
| III.1 Théorème d'existence . . . . .                | 3 |
| III.2 Extrema sous contraintes d'égalités . . . . . | 3 |

## I Définition.

Dans tout ce qui suit,  $f$  est une fonction définie sur un ouvert  $\Omega$  inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $D \subset \Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

On rappelle la

**Définition 15.1** *Un **majorant** (resp. **minorant**) de  $f$  sur  $D$  est un réel  $M$  (resp.  $m$ ) tel que  $f(X) \leq M$  (resp.  $f(X) \geq m$ ) pour tout  $X \in D$ .*

**Définition 15.2** *La fonction  $f$  admet un **maximum global** (resp. un **minimum global**) en  $A$  sur  $D$ , si pour tout  $X \in D$ , on a  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ).*

*La fonction  $f$  admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en  $A$  sur  $D$  si pour tout  $X \in D \cap B(A, \eta)$ , on a  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ).*

*Autrement dit, un maximum est un majorant atteint.*

Remarque: Si  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on parle de problème sans contrainte.  
Si  $D$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ , on parle de problème avec contrainte (ou sous contrainte).

## II Extrema sans contraintes

**Théorème 15.3** *Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \in \Omega$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .  
Si  $f$  admet un extremum local en  $A$  sur  $\Omega$ , alors  $\text{grad } f(A) = 0_{\mathbb{R}^n}$ .*

Attention : La réciproque est fausse !

Exemple: On pose  $f(x, y) = xy$ . On calcule le gradient pour trouver des candidats à l'extremum :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x, \quad \text{donc } \text{grad } f(0_{\mathbb{R}^2}) = (0, 0).$$

Mais  $f(0,0) = 0$  n'est pas extremum car si  $x$  et  $y$  sont de même signe, on a  $f(x,y) > 0$  et si  $x$  et  $y$  sont de signes contraires, on a  $f(x,y) < 0$ . Donc  $f$  n'admet pas d'extremum.

**Définition 15.4** Un point  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\text{grad } f(A) = 0_{\mathbb{R}^n}$  est appelé **point critique** car candidat à l'extremum.

D'après la formule de Taylor-Young pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$ , pour  $A \in \Omega$  et  $H$  assez petit (pour que  $A + H \in \Omega$ ),

$$f(A + H) = f(A) + \langle \text{grad } f(A), H \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) h_i h_j + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

avec  $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$ .

Si  $f$  admet un extremum en  $A$ , alors  $\text{grad } f(A) = 0_{\mathbb{R}^n}$ , donc

$$f(A + H) - f(A) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) h_i h_j}_{Q_A(H)} + \|H\|^2 \varepsilon(H).$$

Donc  $f(A + H) - f(A)$  est du signe de  $Q_A(H)$  pour  $H$  assez petit non nul. Or  $Q_A$  est une forme quadratique! Donc

- si  $Q_A$  est définie positive, alors  $f(A + H) \geq f(A)$  et  $f$  admet un minimum local en  $A$ .
- si  $Q_A$  est définie négative, alors  $f(A + H) \leq f(A)$  et  $f$  admet un maximum local en  $A$ .
- si  $Q_A$  est de signe variable, alors  $f$  n'admet pas d'extremum en  $A$  et on a un "point col" (ou point selle).
- si  $Q_A$  est semi définie positive ou négative, on ne peut pas conclure.

Etant donné le lien fort entre la notion d'extremum et la forme quadratique sus-décrite, on comprend l'intérêt de déterminer au mieux et au plus vite la nature de ladite forme quadratique. Il suffit pour cela de travailler sur la matrice Hessienne de  $f$  en  $A$ .

Exemple: On pose  $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 2y + 1$ .

Le calcul du gradient donne  $\text{grad } f(x,y) = (10x - 2y + 4, 4y - 2x - 2)$ . La recherche des points critiques donne  $A(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Le calcul de la Hessienne donne  $\text{Hess } f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ .

On trouve deux valeurs propres positives  $\left\{ \frac{14 - \sqrt{52}}{2}, \frac{14 + \sqrt{52}}{2} \right\}$ , donc  $Q_A$  est définie positive et  $f$  admet un minimum local en  $A$ .

Or  $f(x,y) = 5(x - \frac{y}{5} + \frac{2}{5})^2 + \frac{1}{5}(3y - 1)^2 \geq 0$ . Donc le minimum est même global.

Cas particulier des fonctions de deux variables : **Règle de Monge**

On pose  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = r$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = s$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = t$ .

On a alors

$$Q_A(H) = r h_1^2 + 2 s h_1 h_2 + t h_2^2$$

qui est polynôme de degré 2 en  $h_1$ .

Le discriminant donne  $\Delta = 4(s^2 - rt)h_2^2$ .

- si  $rt - s^2 > 0$ , ( $\Delta < 0$ ), alors  $Q_A(H)$  est du signe de  $r$ .

Si  $r > 0$ , alors  $f$  admet un minimum local en  $A$  et si  $r < 0$ , alors  $f$  admet un maximum local en  $A$ .

- si  $rt - s^2 < 0$ , ( $\Delta > 0$ ), alors  $Q_A(H)$  est de signe variable et on a un "point col".

- si  $rt - s^2 = 0$ , on ne peut pas conclure.

Remarque: La plupart du temps, quand on ne peut pas conclure, il suffit

- de calculer directement  $f(A + H) - f(A)$ ,

ou

- d'écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3.

### III Extrema sous contraintes

#### III.1 Théorème d'existence

Dans le cas de la dimension 1, on sait déjà qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné possède un maximum et un minimum. Dans ce paragraphe, on établit qu'il en est de même en dimension supérieure.

**Définition 15.5** Une partie  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite **bornée** s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $X \in \mathcal{D}$ , on ait  $\|X\| \leq c$ .

**Définition 15.6** Une partie de  $\mathbb{R}^n$  est dite **compacte** si elle est fermée et bornée.

Remarque: Un ensemble de la forme

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^n, f_i(X) = 0 \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } g_j(X) \leq 0 \forall j \in \llbracket n+1, m \rrbracket\}$$

est un exemple de fermé  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 15.7** (Théorème d'optimisation de Weierstrass) Si  $f$  est continue sur un compact  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $f$  y atteint son maximum et son minimum.

#### III.2 Extrema sous contraintes d'égalités

Problème : Maximiser (ou minimiser) une fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  sous la contrainte  $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

Première méthode : Si  $g(x_1, \dots, x_n) = 0$  entraîne que l'une des variables peut être explicitée en fonction de  $n - 1$  autres, alors l'étude se ramène à la recherche d'extrema d'une fonction de  $n - 1$  variables sans contraintes.

Exemple: On pose  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sous la contrainte  $x + y + z = 1$ .

L'ensemble  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$  est un fermé non compact de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $x + y + z = 1$ , donc  $z = 1 - x - y$ .

Posons  $\varphi(x, y) = f(x, y, 1 - x - y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$

Déterminer les extrema de  $f$  sous la contrainte  $x + y + z = 1$  revient à déterminer les extrema de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 4x + 2y - 2 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 4y + 2x - 2.$$

Les points critiques vérifient  $\text{grad } \varphi(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . De plus, on a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = 4 \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 4.$$

d'où la matrice hessienne :  $\text{Hess}\varphi(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Le polynôme caractéristique est  $P(X) = (2 - X)(6 - X)$ , ce qui donne deux valeurs propres positives, donc  $\varphi$  admet un minimum local en  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  i.e.  $f$  admet  $\frac{1}{3}$  comme minimum en  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  sous la contrainte  $x + y + z = 1$ .

Seconde méthode : Aucune variable ne peut s'écrire comme fonction explicite des autres. On utilise la **méthode des multiplicateurs de Lagrange** (ou du **Lagrangien**).

On note  $\Delta = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_j(X) = 0, \text{ pour } j \in \{1, \dots, p\}\}$ .

Soit  $A \in \Delta$ . On suppose la **condition de qualification des contraintes** satisfaite, à savoir que la famille de vecteurs  $(\text{grad } g_j(A))_{j \in \{1, \dots, p\}}$  est libre.

Alors, si  $f$  admet un extremum en  $A$ , il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que

$$\text{grad } f(A) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \text{grad } g_j(A) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

C'est le théorème des fonctions implicites.

On pose alors  $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(x_1, \dots, x_n)$  appelé le **lagrangien**.

**Proposition 15.8** Les fonctions  $f, g_1, \dots, g_p$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ .

On pose  $A \in \Delta = \{X \in \mathbb{R}^n, g_j(X) = 0 \forall j \in \{1, \dots, p\}\}$ .

On suppose la famille  $(\text{grad } g_j(A))_{j \in \{1, \dots, p\}}$  libre. Si  $f$  admet un extremum en  $A$  sur  $\Delta$ , alors

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(A, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(A, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = 0 & \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$$

Remarques : - Grâce à ce théorème, on obtient les points critiques et les réels associés.

- La fonction  $L$  coïncide avec  $f$  sur  $\Delta$ , mais comme  $\text{grad } L(A) = 0_{\mathbb{R}^n}$ , alors  $L(A + H) - L(A)$  sera du signe de  $Q_A(H)$  suivant des directions tangentes à  $\Delta$  i.e. orthogonales à  $\text{grad } g_j(A)$ .

- On remarque aussi que la seconde partie avec les dérivées partielles par rapport aux  $\lambda_i$  n'est ni plus ni moins qu'une façon d'écrire les contraintes (un bon moyen de retenir la formule donc!).

Exemple: On cherche à maximiser  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6$  sous la contrainte  $x^2 + y^2 = 8$ .

Posons  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ . On a  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\text{grad } g(x, y) = (2x, 2y)$ . Ce qui donne  $\text{grad } g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ . Or  $(0, 0) \notin \Delta$ , donc la condition de qualification des contraintes est vérifiée.

Posons  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 - y^2 + 6 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$ . On a alors

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = -2y + 2\lambda y \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 8 \end{cases}$$

La condition de premier ordre donne

$$\begin{cases} 2x(1 + \lambda) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2\sqrt{2} \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2} \\ y = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Il y a donc quatre points candidats :  $(0, -2\sqrt{2})$  et  $(0, 2\sqrt{2})$  associés au réel  $\lambda = 1$  et  $(-2\sqrt{2}, 0)$  et  $(2\sqrt{2}, 0)$  associés au réel  $\lambda = -1$ .

• D'autre part,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 8\}$  est un compact, donc le maximum et le minimum sont atteints sur  $D$ . il s'agit nécessairement d'un des quatre points précédents.

Or  $f(0, -2\sqrt{2}) = f(0, 2\sqrt{2}) = -2$  donc le minimum de  $f$  est  $-2$  atteint en  $(0, \pm 2\sqrt{2})$ .

Et  $f(-2\sqrt{2}, 0) = f(2\sqrt{2}, 0) = 14$  donc le maximum de  $f$  est  $14$  atteint en  $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ .

• Dans le cas où  $D$  n'est pas compact, on se donne un accroissement  $H = (h_1, h_2)$  non nul tel que  $\langle \text{grad } g(A), H \rangle = 0$

Au point  $(2\sqrt{2}, 0)$  : on a  $\lambda = -1$  et  $\text{grad } g(A) = (4\sqrt{2}, 0)$ . Donc  $\langle \text{grad } g(A), H \rangle = 4\sqrt{2}h_1 = 0$  d'où  $h_1 = 0$  et  $h_2 \neq 0$ . On a

$$\text{Hess}L(A, -1) = \text{Hess}f(A) - \text{Hess}g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } Q_A(H) = (0, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix} = -4h_2^2 < 0$$

Donc  $f$  admet un maximum au point  $(2\sqrt{2}, 0)$  sous la contrainte  $x^2 + y^2 = 8$ .

Au point  $(-2\sqrt{2}, 0)$  : Idem.

Au point  $(0, 2\sqrt{2})$  : Même technique, mais on trouve  $h_2 = 0$  et  $h_1 \neq 0$ . la hessienne est  $\text{Hess}L(A, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  d'où  $Q_A(H) = 4h_1^2 > 0$  et  $f$  admet un minimum au point  $(0, 2\sqrt{2})$  sous la contrainte  $x^2 + y^2 = 8$ .

Au point  $(0, -2\sqrt{2})$  : Idem.

