Convexité

Leçon 16
EN2D2- Lycée Gustave Eiffel - Bordeaux
Thierry Sageaux.

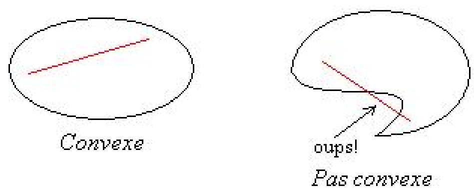
Table des matières

I Définitions

Définition 16.1 *Un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit* ***convexe*** *si*

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{D}^2, \quad \textit{on a } [X,Y] \subset \mathcal{D}$$

avec $[X,Y] = \{\lambda X + (1-\lambda)Y \setminus \lambda \in [0;1]\}$ le segment naturel.



Exercice 1.
Déterminer les ensembles qui sont convexes parmi les suivants :

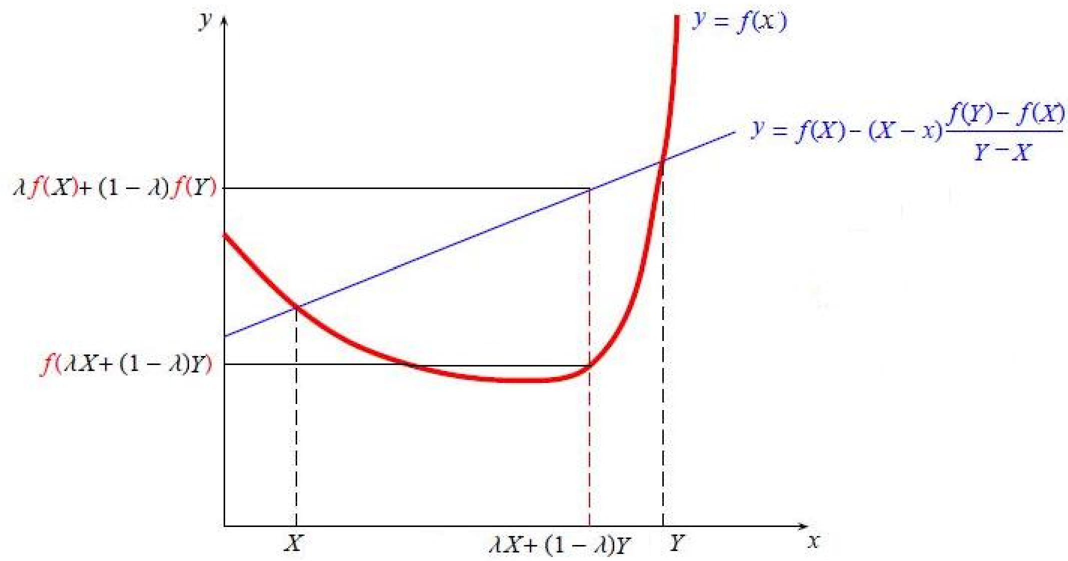
1) $A_1 = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 1\}$,
2) $A_2 = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1\}$,
3) $A_3 =]0;1]$,
4) $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 1 \text{ et } y \in [-1;2]\}$,
5) $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 2\}$,
6) $A_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$,
7) $A_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 0\}$.

Exercice 2.
Montrer que l'intersection non vide de deux convexes est convexe.

Définition 16.2 *Soit $\mathcal{D}$ une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. La fonction f est dite* ***convexe*** *sur $\mathcal{D}$ lorsque*

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{D}^2,\ \forall \lambda \in [0;1] \qquad f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y).$$

Dans le cas où l'inégalité est stricte, on parle de ***stricte convexité****.*
Si $-f$ est convexe, on dit que f est ***concave****.*



Les étudiants ont souvent du mal à se rappeler dans quel sens est la courbe d'une fonction convexe... Dans le plus pur genre des procédés mnémotechniques "Bozo le clown" dont j'ai le secret : On connaît tous la courbe de l'exponentiel à ce niveau. Et bien il suffit de retenir que

L'**EXE**ponentiel est conv**EXE**.

II Théorèmes

Théorème 16.3 *Dans le cas de la dimension 1, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$, alors elle est convexe sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$*

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y).$$

i.e. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus des tangentes à la courbe.

Théorème 16.4 *Dans le cas général, si f est différentiable (i.e. admet un développement d'ordre 1) sur un ouvert $\mathcal{D}$ convexe de $\mathbb{R}^n$, alors f est convexe sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{D}^2, \quad f(X) \geq < grad\, f(Y), X - Y > + f(Y).$$

Théorème 16.5 *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ (ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$), alors f est convexe sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\forall X \in \mathcal{D}, \quad Hess f(X) \text{ est positif (défini ou semi-défini).}$$

Théorème 16.6 *Si f est différentiable (e.g. de classe $\mathcal{C}^1$) et convexe sur un ouvert connexe $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ et si $A \in \mathcal{D}$, alors*

$$grad\, f(A) = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ admet un minimum global en } A.$$

Exemple: La fonction $f : (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 - xy + xz$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ qui est un ouvert connexe.

On veut déterminer les extrema.
On a

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-y+z \\ 2y-x \\ 2z+x \end{pmatrix}$$

La recherche des points critiques donne $\operatorname{grad} f(x,y,z) = 0_{R^n} \quad \Leftrightarrow \quad x=y=z=0$. D'autre part,

$$\operatorname{Hess} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $P(X) = -(2-X)[-(X-2)^2+2]$. Donc $\mathrm{Spec}(\operatorname{Hess} f(x,y,z)) = \{2, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$. Les trois valeurs propres étant positives, la hessienne est définie positive et f est convexe. Donc f admet un minimum global en $(0,0,0)$.

III Enveloppe convexe

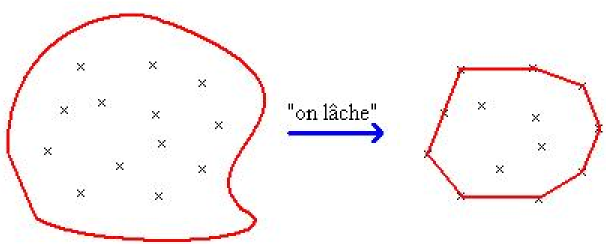
Définition 16.7 *L'**enveloppe convexe** d'un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection de tous les ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant A.*

Cette définition a un sens dans la mesure où il existe au moins un ensemble convexe contenant A, à savoir $\mathbb{R}^n$ lui-même.
De fait, en utilisant l'exercice du début, on obtient la

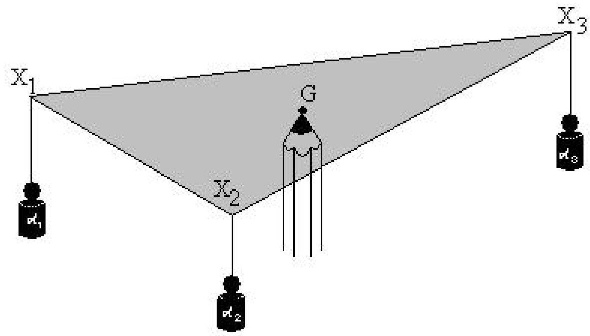
Proposition 16.8 *L'enveloppe convexe est le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant A.*

Exercice 3.
Reprendre l'exercice 1 en déterminant les enveloppes convexes de chacun des ensembles présentés.

Dans le plan, la bonne idée est celle de l'élastique. En effet, on imagine notre ensemble A sous la forme d'un ensemble de points et on prend un grand élastique (éventuellement infini) qui contient tous les points de A quand on l'étire. Puis on lâche !



On obtient bien l'enveloppe convexe de A
La bonne façon de définir l'enveloppe convexe en dimension supérieure reste la théorie des barycentres. En effet, dans la définition du tout début, on introduit le segment $[X,Y]$ et notamment les points de coordonnées $\lambda X + (1-\lambda)Y$. En fait, ce point est ce que l'on appelle de la barycentre du système pondéré $\{(X,\lambda),(Y,1-\lambda)\}$.
Plus généralement, si on a n points $(X_i)_{i=1}^n$ et n réels $(\alpha_i)_{i=1}^n$, pour tout point M, on peut définir le vecteur associé au système pondéré $\{(X_i,\alpha_i)_{i=1}^n\}$ par $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MX_i}$. Il existe un seul point noté G tel que ce vecteur est nul, il s'agit du barycentre du système pondéré. C'est le point d'équilibre du système.
La bonne image à avoir en tête est celle bien connue du triangle. On imagine une petite plaque métallique de la forme de notre triangle. On nomme X_1, X_2 et X_3 les sommets de notre triangle et on place à ces sommets des masses correspondant à α_1, α_2 et α_3. Le barycentre est alors le point d'équilibre où l'on doit placer la pointe de notre crayon pour que le triangle tienne en équilibre (instable, certes).



On obtient le centre de gravité, bien connu des collégiens. On comprend bien sur cet exemple qu'en prenant tous les systèmes pondérés possibles (à masses positives), on obtient l'enveloppe convexe.

On peut même aller un peu plus loin sans entrer dans les détails de la théorie des barycentres qui nécessiterait une leçon à elle seule, en disant que l'on peut toujours multiplier les masses par un même réel sans changer le barycentre (physiquement intuitif et la somme ci-dessus reste nulle). On peut donc supposer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ (en divisant par $\sum\limits_{i=1} n\alpha_i$).

Dans notre cas, on prend toujours des masses positives bien que la théorie des barycentres s'étende aux cas de masses négatives.

On a donc la

Proposition 16.9 *L'enveloppe convexe d'un ensemble A est l'ensemble des barycentres à pondérations positives ou nulles de familles de points de A.*

On en déduit que dans $\mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des points $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i X_i$ où p est un entier, les X_i sont dans A et les α_i sont tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} = 1$.

Un théorème dû à Constantin Carathéodory montre même que lorsque la dimension de l'espace est n, on peut se contenter des sommes de $n+1$ points :

Théorème 16.10 *(Théorème de Carathéodory) Dans un espace affine de dimension n, l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble A est l'ensemble des barycentres à pondérations positives ou nulles de $n+1$ points de A.*