Samedi 5 octobre 2024 (4h)

Devoir Surveillé $n°$1

EN2D2 — Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1.

On définit la relation suivante sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \Leftrightarrow \quad yx^2 \leq y'x'^2.$$

Préciser s'il s'agit d'une relation d'ordre ? de préordre ?

Exercice 2.

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \Leftrightarrow \quad (x \leq x' \text{ et } y \leq y').$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.
2) L'ordre est-il total ? partiel ?
3) Dessiner l'ensemble des majorants de $(1;2)$.
4) On pose $A = \{(1;1),(1;2),(2;2),(3;1)\}$. (On donnera à chaque fois la définition)
  a) L'ensemble A admet-il un plus petit élément ?
  b) L'ensemble A admet-il un plus grand élément ?
  c) L'ensemble A admet-il une borne sup ?
  d) L'ensemble A admet-il une borne inf ?

Exercice 3.

On m'a souvent demandé de déterminer l'erreur dans le raisonnement suivant : "Si la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est symétrique et transitive, alors elle est réflexive ! En effet, $\forall (x,y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ par symétrie et comme maintenant $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, par transitivité, $x\mathcal{R}x$".

On se doute bien que c'est faux. Que suffit-il de répondre pour infirmer le raisonnement ?

Exercice 4.

Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire suivante :

$$x\mathscr{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y.$$

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer en fonction de $x \in \mathbb{R}$ le nombre d'éléments dans la classe d'équivalence de x.

Exercice 5.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit $s(A) = \bigcup_{x\in A} \dot{x}$.

En notant $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x pour $\sim$.
1) Comparer A et $s(A)$.
2) Simplifier $s(s(A))$.
3) Montrer que : $\forall\, x \in E$, on a $(x \in s(A)) \iff (\dot{x} \cap s(A) \neq \emptyset)$.
En déduire $s(E \setminus s(A))$.
4) Démontrer que $s\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} s(A_i)$ et $s\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} s(A_i)$.
5) Donner un exemple d'inclusion stricte.

Exercice 6.

Paul a dans sa poche deux boîtes d'allumettes indiscernables ; l'une contient cinq allumettes, l'autre deux. Il choisit au hasard une des boîtes, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de cigarettes allumées avant de jeter une des deux boîtes.

1) Déterminer la loi de X.

2) Calculer l'espérance $E(X)$.

Exercice 7.

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.

La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.

La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Soient E et F les évènements :
E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
Montrer que $p(E) = 0,02$ et $p(F) = 0,17$.

3) Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
On désigne par X la variable aléatoire égale au gain en euros du joueur.
  a) Déterminer la loi de probabilité de X.
  b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.
  c) Calculer la variance de X.

4) Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)
  a) Déterminer la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B.
  b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

Exercice 8.

Je dois affronter Goliath dans un duel constitué de trois parties sur deux jeux : la bataille de pouces (où il est plus fort que moi) et les échecs (où je suis plus fort que lui). On doit alterner les jeux et si l'un d'entre nous gagne deux parties de suite, il a gagné. Que dois-je préférer ? Pouces/Echecs/Pouces ou Echecs/Pouces/Echecs ?

Correction Devoir Surveillé 1

Exercice 1.

Réflexivité et transitivité ne posent pas de problème. En revanche, la relation n'est pas antisymétrique. En effet, si $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ et si $(x',y')\mathcal{R}(x,y)$, alors on trouve $yx^2 = y'x'^2$. Ce qui n'implique pas que $(x,y) = (x',y')$. Contre-exemple : $(1,1)\mathcal{R}(-1,1)$ et $(-1,1)\mathcal{R}(1,1)$.

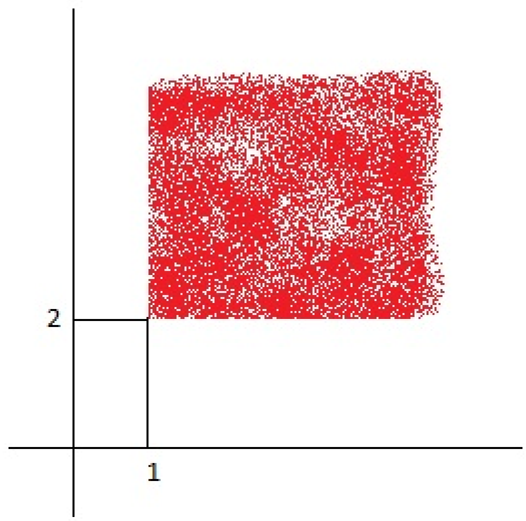
Il s'agit donc d'une relation de préordre et non d'une relation d'ordre.

Exercice 2.

1) Les trois propriétés se vérifient aisément.

2) L'ordre est partiel car $(1,2)$ et $(2,1)$ ne sont pas comparables.

3)



4) a) Le plus petit élément d'un ensemble est, quand il existe, un élément $(m,m') \in A$ tel que $(m,m')\mathcal{R}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in A$. Ici, il faut prendre $(1;1)$ qui est le plus petit élément.

b) Le plus grand élément d'un ensemble est, quand il existe, un élément $(M,M') \in A$ tel que $(x,y)\mathcal{R}(M,M')$ pour tout $(x,y) \in A$. Ici, il n'y a pas de plus grand élément. en effet, $(3;1)$ ne peut être comparé à $(2;2)$ du fait de l'ordre partiel.

c) La borne sup d'un ensemble est le plus petit des majorants. On dessine donc l'ensemble des majorants de chacun des points de A et on prend le plus petit qui se trouve dans l'intersection, s'il existe. Ici, il faut prendre $(3;2)$ qui est la borne sup.

d) La borne inf est le plus grand des minorants. Mais il ne peut pas y avoir de minorants plus grand que le plus petit élément quand il existe. C'est donc $(1;1)$.

Exercice 3.

Il suffit de considérer un élément x qui n'est en relation avec personne. le raisonnement ne s'applique pas et on n'est pas assuré que x soit en relation avec x.

Exercice 4.

1) Il suffit de voir que l'équation est séparable et la démonstration des trois propriétés ne pose aucun problème.

2) Mes éléments qui sont dans la classe de x sont tels que $x^2 - y^2 = x - y \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y) = x - y \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y-1) = 0$.

Donc $y = x$ ou $y = 1 - x$. Ainsi, il y a deux éléments par classe, sauf si $x = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$, auquel cas il y a un seul élément dans la classe.

Exercice 5.

1) Soit $y \in A$, alors $y \in \dot{y}$. Donc $y \in s(A)$ puisque $s(A)$ est le regroupement de toutes les classes des éléments qui sont dans A.

En revanche, si on choisit $y \in s(A)$, cela veut dire que $y\mathcal{R}x$ avec un $x \in A$, mais rien ne dit que $y \in A$. Pour fournir un contre exemple à l'inclusion dans l'autre sens, il suffit de prendre un élément x qui a au moins deux éléments dans sa classe $\{x, y\} \subset \dot{x}$. En posant $\{x\} = A$, on a alors $A \subsetneq s(A)$.

2) On a clairement $s(A) \subset s(s(A))$.

Dans l'autre sens, on prend $t \in s(s(A))$. Comme $s(s(A)) = \bigcup_{y \in s(A)} \dot{y}$, il existe un $y \in s(A)$ tel que $t \in \dot{y}$. Mais comme $y \in s(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y\dot{x} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} = \dot{y}$. Ainsi, $t \in \dot{x}$ et $t \in s(A)$. Donc $s(s(A)) = A$ d'où la notion de saturé.

3) Si $x \in s(A)$, alors il existe $y \in A$ tel que $x \in \dot{y}$. Ainsi, $\dot{y} = \dot{x}$ et $\dot{x} \cap s(A) = \dot{y} \cap s(A) = \dot{y} \neq \emptyset$

Si $x \in E$ tel que $(\dot{x} \cap s(A) \neq \emptyset)$, alors il existe $y \in (\dot{x} \cap s(A))$. Comme $y \in s(A)$, on a $\dot{y} \subset s(A)$ et en particulier, $x \in \dot{y} \subset s(A)$.

On en déduit que $s(E \setminus s(A)) = E \setminus s(A)$.

4) Il est clair que $\bigcup_{i \in I} s(A_i) \subset s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Dans l'autre sens, soit $x \in s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$, alors il existe $y \in \cup A_i$ tel que $x \in \dot{y}$. Mais comme $x \in s(A_i)$, on a bien $x \in s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Pour l'intersection, on prend $x \in s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$, alors il existe $y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ tel que $x \in \dot{y}$. Donc $\dot{y} \in s(A_i)$ pour tout i et $x \in \bigcap_{i \in I} s(A_i)$.

5) On prend $(x, y, z) \in E^3$ tels que $y\mathcal{R}z$, mais x n'est pas en relation avec y (ou z). On pose alors $A = \{x, y\}$ et $B = \{x, z\}$. Ainsi, $s(A \cap B) = \dot{x}$ et $s(A) \cap s(B) = \dot{x} \cup \dot{y}$.

Exercice 6.

1) Un calcul élémentaire donne

x_i	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{32}$

Par exemple, pour $p(X = 5)$, on appelle A l'évènement "tirer la boîte ayant cinq allumettes au début" et B l'évènement "tirer la boîte ayant deux allumettes au début". On calcule le nombre de combinaisons qui vident la première boîte : il n'y en a qu'une : $AAAAA$; ainsi que le nombre de combinaisons qui vident la seconde boîte : Il est nécessaire et suffisant que la combinaison finisse par un B et ne possède qu'un seul B auparavant, soit $AAABB$, $AABAB$, $ABAAB$ ou $BAAAB$. Autrement dit, il y en a $\binom{4}{1}$. Chacun de ces évènement à la même probabilité de se produire, soit $\frac{1}{2^5}$. D'où la probabilité cherchée : $p(X = 5) = \frac{1}{32} + \frac{4}{32} = \frac{5}{32}$.

2) On utilise le tableau précédent :

$$E(X) = \sum_{n=2}^{6} np(X = n) = \boxed{\frac{119}{32}}.$$

Exercice 7.

1) Laissé au lecteur parce que c'est pénible à tracer.

2) On écrit $p(E) = P(R_1 \cap R_1) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = \dfrac{2}{20} \times \dfrac{4}{20} = 0,02$.

Pour $p(F)$, on utilise la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements (N_1, R_1).

$$p(F) = p(N_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap N_2) = \frac{2}{20} \times \frac{16}{20} + \frac{18}{20} \times \frac{2}{20} = 0,17$$

3) a) On a $X(\Omega) = \{-1; 1; 9\}$. Il ne faut pas oublier la mise de départ.

x_i	-1	1	9
$p(X = x_i)$	$0,81$	$0,17$	$0,02$

b) $E(X) = \sum x_i p(X = x_i) = -0.46$.

c) On commence par calcule rle moment d'ordre 2 avant d'utiliser König-Huygens. On trouve $E(X^2) = 2,6$ et $V(X) = 2,3884$.

4) a) Il s'agit de la négation de ne pas lancer la roue B, i.e. $p_n = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$

b) Comme $\left|\frac{9}{10}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.

Exercice 8.

Paradoxalement, il faut commencer par le jeu où on est le plus faible !

Soit e la proba que je gagne aux échecs et p celle que je gagne aux pouces. On a, d'après le texte, $p < e$. La probabilité d'avoir au moins deux victoires successives dans la séquence P/E/P est $pep + pe(1-p) + (1-p)ep = pe(2-p)$. De même, dans la configuration E/P/E, on trouve $pe(2-e)$ qui est plus petit que $pe(2-p)$. Donc il vaut mieux commencer par les Pouces !