

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1.

Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle converge. On utilisera une méthode différente à chaque fois.

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n}},$$

$$2) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n,$$

$$3) \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$4) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^n.$$

Exercice 2.

Déterminer à quelles conditions sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$$

Exercice 3.

On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$.

- 1) Montrer que I est convergente.
- 2) Montrer que $I = J$.
- 3) En calculant $I + J$, trouver la valeur de I .

Exercice 4.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

- 1) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i .
b) Donner la loi de X_1 .
c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T .
- 2) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$
b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1 - p$
- 3) a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$
b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k (1-p)$.

En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$.

4) a) Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$

b) En déduire que $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

5) a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.

b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$

Montrer que $u_{n+1} = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$

c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n .

d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$

Exercice 5.

On considère un jeu de lancers successifs et indépendants d'une pièce à pile ou face. On note X_i la variable aléatoire représentant le $i^{\text{ème}}$ lancer, $i \in \mathbb{N}^*$. La variable X_i prend la valeur 1 (pile) avec la probabilité $p \in [0, 1]$ et la valeur 0 (face) avec la probabilité $q = 1 - p$. les variables aléatoires X_i sont donc indépendantes et identiquement distribuées.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Que représente S_n ? Quelle est sa loi? Justifier.

2) On note T_1 le temps d'attente avant l'apparition d'un premier pile. Ainsi, pour $i \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(T_1 = i) = (X_1 = 0, \dots, X_{i-1} = 0, X_i = 1)$. Déterminer la loi de T_1 et donner son espérance.

3) De façon similaire, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note T_k le temps d'attente avant l'apparition du $k^{\text{ème}}$ pile. On utilise la convention $T_0 = 0$. Ainsi, $T_k = 0$ si et seulement si $k = 0$.

a) Que représente le temps $T_{k+1} - T_k$?

b) Montrer que

$$P(T_1 = t_1, \dots, T_m = t_m) = \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)^m q^{t_m}, & \text{si } 0 < t_1 < \dots < t_m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4) On suppose qu'au lancer n , on a observé m piles. Posons $A = (S_n = m)$ et

$$B = (T_1 = t_1, \dots, T_m = t_m), \quad t_1 \leq \dots \leq t_m \leq n.$$

Calculer la probabilité $P_A(B)$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un lancer particulier. Que représente T_{S_n} ? T_{S_n+1} ? $T_{S_n+1} - T_{S_n}$?

Attention aux indices : on s'intéresse à $S_n + 1$, et non à S_{n+1} (ni même $T_{S_n} + 1$).

6) On pose $U_n = n - T_{S_n}$ et $V_n = T_{S_n+1} - n$. On note que les valeurs possibles pour U_n (resp. V_n) sont $\llbracket 0, n \rrbracket$ (resp. $\mathbb{N}^*$).

a) Calculer $P(U_n = i, V_n = j)$. On distinguera les cas $i = n$ et $0 \leq i < n$.

b) En déduire que

$$P(U_n = i) = \begin{cases} pq^i & \text{si } 0 \leq i < n \\ q^n & \text{si } i = n \end{cases} \quad \text{et} \quad P(V_n = j) = pq^{j-1}.$$

c) En déduire que U_n et V_n sont des variables aléatoires indépendantes.

7) Exprimer $T_{S_n+1} - T_{S_n}$ en fonction de U_n et V_n . En déduire $E(T_{S_n+1} - T_{S_n})$ et la comparer à $E(T_1)$.



Correction Devoir Surveillé 2

Exercice 1.

1) Critère spécial des séries alternées. CV.

2) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(\frac{n}{n+1})} = e^{-n \ln(1+\frac{1}{n})}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$. Donc le terme général de la suite tend vers $e^{-1} \neq 0$. La série diverge grossièrement.

3) D'alembert. CV.

4) Cauchy. CV.

Exercice 2.

CV si et seulement si $\alpha = 0$ ou $0 < \beta - \alpha < 1$.

Exercice 3.

1) Au voisinage de 0, on a $\ln(\sin x) \sim \ln x$ dont l'intégrale converge.

2) On utilise le changement de variables : $t = \frac{\pi}{2} - x$ (qui est bien strictement monotone et $\mathcal{C}^1$).

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin x)(-dx) = J.$$

A noter que le changement $\cos x = \sin t$ fonctionne aussi, bien que plus technique.

$$3) I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx - \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

En posant $x = \frac{t}{2}$, on obtient

$$I + J = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \ln(\sin t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{J}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} \ln(\sin t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

puis en posant $u = \pi - t$, on a

$$I + J = \underbrace{\frac{J}{2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin t)(-dt)}_{\frac{J}{2} + \frac{J}{2} = J} - \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Donc $\boxed{I = -\frac{\pi}{2} \ln 2}.$

Exercice 4.

1) a) $(T = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i = i)\right) \cap (X_k = 0)$

b) On a $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ et $p(X_1 = 1) = p$, donc X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

c) D'après la formule des probabilités composées, on a

$$p(T_k = k) = p\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i = i)\right) \cap (X_k = 0)\right) = p(X_1 = 1) \times p_{(X_1=1)}(X_2 = 2) \times p_{(X_1=1) \cap (X_2=2)}(X_3 = 3) \times \dots \times p_{\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i=k)}(X_k = 0) = p^{k-1}(1-p)$$

Comme $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a T qui suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1-p$, $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(1-p)$.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : "X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket"$.

Initialisation : $X_0 = \{0\}$ d'après l'énoncé.

Hérédité : On suppose P_n vrai pour n fixé. Depuis la position $X_n = k$ à l'instant n , le mobile a le choix entre revenir au départ (i.e. $X_{n+1} = 0$) ou avancer d'une case (i.e. aller en $k+1$), ce qui fait que toutes les valeurs $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ sont atteintes.

Ainsi $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Avec la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements :

$$p(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} p((X_{n-1} = k) \cap (X_n = 0)) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0) \times p(X_{n-1} = k) = \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)p(X_{n-1} = k) = (1-p) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} p(X_{n-1} = k)}_{=1}$$

3) a) Avec la même formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(X_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=0}^n \underbrace{p_{(X_n=\ell)}(X_{n+1} = k)}_{=0 \text{ sauf si } \ell=k-1} \times p(X_n = \ell) \\ &= p_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) \times p(X_n = k-1) \\ &= p \times p(X_n = k-1) \end{aligned}$$

b) La preuve se fait par récurrence, l'hérédité étant précisément établie à la question précédente.

Pour $p(X_n = n) = p^n$. En effet, d'après la question précédente, $p(X_n = n) = p(X_{n-1} = n-1) = \dots = p^n p(X_n = 0) = p^n$ avec une récurrence immédiate.

c) On calcule

$$\sum_{k=0}^n p(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} p(X_n = k) + p(X_n = n) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n = (1-p) \frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 41$$

4) a) On a $\sum_{k=1}^{n-1} p^k = p \frac{1-p^n}{1-p}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} &= \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{n-1} p^k \right)}{\partial p} \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{1-p^{n-1}}{1-p} \right) \\ &= \frac{1-p^{n-1}}{1-p} + p \frac{-(n-1)p^{n-2}(1-p) + (1-p^{n-1})}{(1-p)^2} \\ &= \frac{(1-p^{n-1})(1-p) - p(n-1)p^{n-2}(1-p) + p(1-p^{n-1})}{(1-p)^2} \\ &= \frac{1-p^{n-1} - p + p^n - (n-1)p^{n-1} + (n-1)p^n + p - p^n}{(1-p)^2} \\ &= \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} \end{aligned}$$

b) On utilise la définition :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^n k p(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k p^k(1-p) + n p^n \\ &= \cancel{(1-p)} \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n p^n \end{aligned}$$

- 5) a) On utilise un caprice, le fait que $k^2 = (k-1+1)^2 = (k-1)^2 + 2(k-1) + 1$.
b) Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= E(X_{n+1}^2) + (2n+1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1) + (2n+1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p \left(\underbrace{E(X_n^2) + (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p}}_{=u_n} \right) - p(2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p} + 2pE(X_n) + p + (2n+1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{1}{1-p} (2p^2(1-p^n) + p(1-p) + 2p^{n+2}) \\
&= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}
\end{aligned}$$

- c) La suite (u_n) est arithmético-géométrique, on procède comme d'habitude : $v_n = u_n - \alpha$

$$v_{n+1} = pv_n \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$$

$$\text{Donc } u_n = p^n \frac{-p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}.$$

$$\text{Ainsi, } E(X_n^2) = p^n \frac{-p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{p^{n+2} - p - p^2 - 2np^{n+1}}{(1-p)^2}$$

Exercice 5.

- 1) La variable X_i suit donc une loi de Bernoulli et S_n est la variable aléatoire de la somme de n variables aléatoires identiques et indépendantes ayant la même probabilité de succès. Donc S_n suit une loi binomiale de paramètre p et n .
2) On a $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et comme il s'agit de la répétition de schéma de Bernoulli jusqu'au premier succès, T_1 suit une loi géométrique de paramètre p . Ainsi, $E(T_1) = \frac{1}{p}$.
3) a) La variable $T_{k+1} - T_k$ représente le temps nécessaire pour passer d'un $k^{\text{ième}}$ succès à un $k+1^{\text{ième}}$.
b) Si l'on code la séquence en binaire avec des 0 pour les échecs et des 1 pour les succès, on obtient :

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, \dots, 0, 1)$$

les 1 étant aux niveaux des t_i . La probabilité d'obtenir cette liste est donc

$$q^{t_1-1} p q^{t_2-t_1-1} p \dots q^{t_m-t_{m-1}-1} p = q^{t_m-m} p^m = \boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m q^{t_m}}$$

Si la condition $0 < t_1 < \dots < t_m$ n'est pas réalisée, l'évènement est impossible, donc de probabilité nulle.

- 4) On procède au dénombrement : Il y a m piles exactement sur n lancers. L'évènement B fixe les places de ces lancers. Donc $P_A(B) = \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{m!(n-m)!}{n!}$.

- 5) S_n étant le nombre de succès sur les n tirages et T_{S_n} est le nombre de tirages avant le dernier succès.

Quant à T_{S_n+1} , la variable $S_n + 1$ représente le nombre de succès plus 1. Donc T_{S_n+1} est le nombre de lancers avant le $S_n + 1$ ième succès.

Ainsi, $T_{S_n+1} - T_{S_n}$ est le nombre de lancers supplémentaires nécessaires pour avoir un succès de plus.

6) a) La variable U_n représente le nombre de tirages restants parmi les n premiers tirages après le dernier succès. Alors que V_n est le nombre de tirages qu'il faut attendre après le $n^{\text{ième}}$ pour avoir un nouveau succès.

- Si $i = n$, cela signifie que $T_{S_n} = 0$, i.e. $S_n = 0$, il n'y a pas eu de succès, soit une probabilité de q^n . L'évènement $V_n = j$ correspond alors au fait d'attendre j lancers avant d'avoir un premier succès, soit une probabilité de $q^{j-1}p$. Ainsi, $P(U_n = i, V_n = j) = q^{n+j-1}p$.

- Si $0 \leq i < n$, on a alors $P(U_n = i, V_n = j) = pq^i q^{j-1}p = p^2 q^{i+j-1}$ car il y a un succès en S_n , une succession de i échecs jusqu'au $n^{\text{ième}}$ tirage, puis $j - 1$ échecs et enfin un succès.

b) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements $(V_n = j)_{j \in \mathbb{N}^*}$. On obtient alors si $i \neq n$

$$\begin{aligned} P(U_n = i) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(U_n = i, V_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} p^2 q^{i+j-1} = p^2 q^i \sum_{j=1}^{+\infty} q^{j-1} \\ &= p^2 q^i \frac{1}{1-q} = \boxed{pq^i} \end{aligned}$$

Si $i = n$, que des échecs, pas la peine de se compliquer la vie, $P(U_n = n) = q^n$.

Pour V_n , on procède de la même façon, mais le système complet d'évènements a changé et devient $(U_n = i)_{0 \leq i \leq n}$.

$$\begin{aligned} P(V_n = j) &= \sum_{i=0}^n P(U_n = i, V_n = j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} p^2 q^{i+j-1} + q^{n+j-1}p \\ &= p^2 q^{j-1} \sum_{i=0}^{n-1} q^i + q^{n+j-1}p \\ &= p^2 q^{j-1} \frac{1-q^n}{1-q} + q^{n+j-1}p \\ &= \boxed{pq^{j-1}} \end{aligned}$$

c) Il suffit de vérifier que $P(U_n = i, V_n = j) = P(U_n = i) \times P(V_n = j) \forall (i, j)$. Ce qui est évident.

7) On a $T_{S_n+1} - T_{S_n} = V_n + U_n$. Par linéarité, $E(T_{S_n+1} - T_{S_n}) = E(V_n) + E(U_n)$.

Or $E(V_n) = \frac{1}{p}$ par définition de la loi géométrique et $E(U_n) = \sum_{i=0}^{n-1} ipq^i + nq^n = pq \sum_{i=1}^{n-1} iq^{i-1} + nq^n$.

Comme

$$\sum_{i=1}^{n-1} iq^{i-1} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{i=1}^{n-1} q^i \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(q \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \right) = \frac{(1-nq^{n-1})(1-q) + (q-q^n)}{(1-q)^2} = \frac{1-nq^{n-1} + (n-1)q^n}{(1-q)^2}$$

on trouve

$$E(U_n) = pq \frac{1-nq^{n-1} + (n-1)q^n}{(1-q)^2} + nq^n = \frac{q-nq^n + (n-1)q^{n+1} + nq^n(1-q)}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}.$$

Donc

$$E(T_{S_{n+1}} - T_{S_n}) = \frac{1}{p} + \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} = \boxed{\frac{1 + q - q^n}{p}}$$

Si $n = 1$, on retrouve la formule de $E(T_1)$, mais si $n > 1$, alors l'espérance est plus grande.

