Samedi 3 février 2024 (4h)

Devoir Surveillé $n°$3

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudoux (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1.

Partie A.

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*, u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1) a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{p+1}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

2) On considère la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = x(1+\ln(x)) \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Montrer que φ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3) Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt$

a) Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\varphi_n(0)$?

b) Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln x)$.

On montrera que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$

4) Calculer b_n.

5) Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = n!\, a_n$.

a) Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $|c_n| \leqslant 1 + \ln(n)$.

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

d) Montrer enfin que la série de terme général a_n est absolument convergente.

Partie B.

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies par :$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2, e_3(x) = x\ln(x)$ et $e_4(x) = x^2\ln(x)$. On note $E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

1) On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que :
(*) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0$.

a) Montrer que $a + b = 0$.

b) Etablir que : $\forall x > 1, \frac{a}{x\ln(x)} + \frac{b}{\ln(x)} + \frac{c}{x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$.

c) Etablir ensuite que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{a}{x} + b + c\frac{\ln(x)}{x} = 0$. En déduire que $b = 0$.

d) Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.

2) a) Déduire de la question précédente que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.

b) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.

3) On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = xf'(x)$.

a) Montrer que u est une application linéaire.

b) Déterminer $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$.

c) En déduire que u est un endomorphisme de E.

4) a) Donner la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

b) Montrer que u est un automorphisme de E.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = xe^{-\dfrac{x^2}{2}} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1) Vérifier que f est une densité de probabilité.

La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f.

2) a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Calculer la médiane de X c'est-à-dire le réel μ tel que $p(X \leqslant \mu) = \dfrac{1}{2}$.

3) On appelle mode de la variable X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode, noté M_o, et le déterminer.

4) a) Etablir que X a une espérance et montrer que $E(X) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

b) Calculer $V(X)$.

Exercice 3.

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1) a) Montrer que E est un espace vectoriel.

b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E.

a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E.

b) Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.

c) Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.

3) On considère l'ensemble F des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des réels.

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.

b) Trouvez un espace vectoriel supplémentaire de F dans E.

4) On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de F associe le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j}$, où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne.

a) Montrer que φ est une forme linéaire.

b) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$.

c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\operatorname{Ker}\varphi$. Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y et z et en déduire une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.

Correction Devoir Surveillé 3

Exercice 1.

Partie A.

1) a) On minore l'intégrande : $\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{p+1}$ sur l'intervalle $[p, p+1]$ et on intègre en n'oubliant pas de mentionner que les fonctions sont continues sur l'intervalle en question et que les bornes sont dans le bons sens $(p < p+1)$.

D'où $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{p+1}$.

b) Si l'on somme toutes les inégalités précédentes de $k=1$ à $k=n-1$, on obtient avec Chasles :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_1^n = \ln n$. Et en ajoutant 1 de part et d'autre :

$$u_n \leq 1 + \ln n.$$

2) La fonction est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions de référence. Il reste à voir en 0. Mais $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(1+\ln x) = 0 = \varphi_1(0)$ car $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x = 0$. Donc φ_1 est continue en 0 aussi.

3) a) Il est clair que si φ_n est continue, $\varphi_n(0) = 0$. On procède par récurrence en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n : "φ_n est définie et continue sur $\mathbb{R}_*$".

<u>Initialisation :</u> Question 2.

<u>Hérédité :</u> On suppose P_n vraie pour n fixé. Comme φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a φ_{n+1} qui est définie en tant qu'intégrale d'une fonction continue. En outre, il s'agit de la primitive de φ_n qui s'annule en 0. Elle est donc dérivable, ce qui fait d'elle une fonction continue.

<u>Conclusion :</u> La propriété est initialisée au rang 1, elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Par récurrence là encore en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln x)$".

<u>Initialisation :</u> Au rang 1, il suffit de prendre $a_1 = b_1 = 1$.

<u>Hérédité :</u> On suppose P_n vraie pour n fixé. Il suffit d'effectuer une intégration par parties :

$$v(t) = a_n + b_n \ln t \quad \Rightarrow \quad v'(t) = \frac{b_n}{t}$$
$$w'(t) = t^n \quad \Leftarrow \quad w(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Ces fonctions sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\varphi_{n+1}(x) = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(a_n + b_n \ln t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{b_n}{t}\frac{t^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}t = x^{n+1}\left(\underbrace{\frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}}_{=a_{n+1}} + \underbrace{\frac{b_n}{n+1}}_{=b_n n+1} \ln x\right)$$

<u>Conclusion :</u> La propriété est initialisée au rang 1, elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) On trouve par récurrence immédiate $b_n = \dfrac{1}{n!}$

5) a) On a $c_n = n!a_n = n!\dfrac{a_{n-1}}{n} - \dfrac{n!b_{n-1}}{n^2} = (n-1!)a_{n-1} - \dfrac{1}{n}$. Là encore par récurrence immédiate, $c_n = a_1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2 - u_n$.

b) On sait que (u_n) diverge vers $+\infty$ en tant que série harmonique. Don cil existe un rang à partir duquel $2 < u_n$ et

$$c_n = |2-u_n| = u_n - 2 \leq 1 + \ln n - 2 \leq 1 + \ln n.$$

c) Par encadrement : d'après ce qui précède, $|a_n| \leq \dfrac{1+\ln n}{n!}$, cette dernière fraction ayant pour limite 0.

d) Il suffit de voir que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1+\ln k}{k!}$ converge comme série à termes positifs, via d'Alembert par exemple.

$$\frac{1+\ln(n+1)}{(n+1)!} \times \frac{n!}{1+\ln n} = \frac{1+\ln(n+1)}{(n+1)(1+\ln n)}$$

Partie B.

1) a) Prendre $x = 1$.

b) On divise par $x^2 \ln x$ et on calcule la limite en $+\infty$.

c) On divise par $x \ln x$ et on calcule la limite en $+\infty$ après avoir utilisé le fait que $d = 0$.

d) Sans déconner ? C'est une question ça ? Tout au plus une remarque.

2) a) On pose $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0_E$. Si on résout cette équation, on obtient, d'après ce qui précède, $a = b = c = d = 0$, donc la famille est libre.

b) La famille est libre et génératrice par définition, il s'agit d'une base.

3) a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(f_1, f_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} u(\lambda f_1 + \mu f_2)(x) &= x(\lambda f_1 + \mu f_2)'(x) \\ &= \lambda x f_1'(x) + \mu x f_2'(x) \\ &= \lambda u(f_1) + \mu u(f_2) \end{aligned}$$

b) On trouve $u(e_1) = x$, $u(e_2) = 2x^2$, $u(e_3) = x + x\ln x$, $u(e_4) = x^2 + 2x^2 \ln x$

c) On remarque que $u(e_i) \in E$ pour tout $i \in [\![1,4]\!]$. Donc $\mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)) \in E$ et u est bien un endomorphisme.

4) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) On sait déjà qu'il s'agit d'un endomorphisme, il suffit de prouver que u est bijective, i.e. A est inversible, ce qui est évident car elle est triangulaire avec des valeurs non nulles sur la diagonale (le rang est maximal).

Exercice 2.

1) On vérifie les trois axiomes :

- f est positive.
- f est continue, sauf éventuellement en 0 comme composition et produit de fonctions continues. (Nous n'en avons pas besoin, mais $\lim\limits_{x \to 0} x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, elle est donc aussi continue en 0.
- Il faut vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A te^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \left[-e^{\frac{-x^2}{2}}\right]_0^A = \lim_{A \to +\infty} \left(1 - e^{\frac{-A^2}{2}}\right) = \boxed{1}$$

Ainsi f est une densité de probabilité.

2) a) Il suffit d'intégrer

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x te^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \boxed{1 - e^{\frac{-x^2}{2}}}$$

si $x \geq 0$ et $F(x) = 0$ sinon.

b) On résout

$$p(X \leqslant \mu) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{\frac{-\mu^2}{2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ln \tfrac{1}{2} = \frac{-\mu^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = 2\ln 2$$

Comme la solution cherchée ne peut être que positive, on trouve $\boxed{\mu = \sqrt{2\ln 2}}$.

3) Il suffit d'étudier les variations de f. On a $f'(x) = (1-x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}$ pour $x \geq 0$. Le maximum est donc atteint en $x = 1$ et vaut $M_0 = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

4) a) Il faut d'abord montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \longmapsto x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$ est convergente. Riemann va nous aider : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$, donc $x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Pour le calcul :

$$\int_0^A x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x = \underbrace{\left[xe^{\frac{-x^2}{2}}\right]_0^A}_{\to 0} + \int_0^A e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

en faisant une intégration par parties avec $u(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1$, $v'(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}} \quad \Leftarrow \quad v(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}}$ qui sont continues.

Comme $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1$ en utilisant la loi normale centrée réduite, on obtient

$$E(X) = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x = \boxed{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}.$$

b) On calcule le moment d'ordre 2 :

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{\frac{-x}{2}} \mathrm{d}x = \underbrace{\left[-x^2 e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 2\int_0^{+\infty} xe^{\frac{-x}{2}} \mathrm{d}x = 2$$

D'après Koening-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 3.

1) a) On va montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- On a clairement $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc $E \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- La matrice nulle est dans E qui n'est donc pas vide.
- Stabilité pour la combinaison linéaire : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, M') \in E^2$. A-t-on $\lambda M + \mu M' \in E$?

Il suffit d'écrire

$$(\lambda M + \mu M')K = \lambda MK + \mu M'K = \lambda KM + \mu KM' = K(\lambda M + \mu M') = \lambda M + \mu M'$$

Ainsi E est un espace vectoriel.

b) Si M est inversible, alors $MK = M \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1}MK = M^{-1}M \quad \Leftrightarrow \quad K = I$ ce qui est faux.

2) a) On calcule

$$KM = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad MK = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

Comme elles sont toutes égales, on obtient bien $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$.

b) Ainsi, on a $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix}$

Les colonnes 1 et 3 sont identiques, donc $\operatorname{rg} M < 3$ et la matrice n'est pas inversible.

c) On a

$$M = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_3} + e\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_4}$$

Il suffit de voir que ces quatre matrices sont libres, ce qui est évident quand on résout $M = (0)$. Donc $\dim E = 4$.

3) a) On a $M = xM_1 + y(M_2 + M_3) + zM_4$. Donc $F \subset E$.

On a clairement la matrice nulle dans F en posant $x = y = z = 0$.

Pour la stabilité par la combinaison linéaire, elle est laissée au lecteur car triviale (argument irrecevable dans une copie bien sûr).

On trouve pour base de F : $(M_1, M_2 + M_3, M_4)$.

b) Il est clair qu'il ne manque qu'une seule matrice pour compléter l'espace F. On construit dans $G = \operatorname{Vect}(M_2)$. On a bien $G \cap F = \{(0)\}$ et comme $M_3 = (M_2 + M_3) - M_3$, on a bien $F + G = \operatorname{Vect}(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

Donc $E = F \oplus G$.

4) a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(A, B) \in F^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda A + \mu B) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j} + \mu \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}b_{i,j} \qquad = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B) \end{aligned}$$

Donc est bien linéaire. C'est de plus une forme car $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$.

b) Comme $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$, il n'y a pas beaucoup de choix. Soit $\dim \operatorname{Im}\varphi = 0$, auquel cas φ est l'application nulle. Soit $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$ et il suffit d'exhiber une matrice A telle que $\varphi(A) \neq 0$.

La matrice $A = M_1$ convient car $\varphi(M_1) = 4$.

Donc $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$ et $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$.

On applique alors le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim F}_{=3} = \underbrace{\operatorname{rg}\varphi}_{=1} + \dim \operatorname{Ker}\varphi$$

Donc $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 2$.

c) On calcule

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j} = \boxed{4x - 4y + z}$$

On a $\varphi(M = (0) \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 4y + z = 0$. Donc

$$M \in \operatorname{Ker}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 4y-4x & y \\ x & y & x \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad M = x(M_1 - 4M_4) + y(M_2 + M_3 + 4M_4)$$

Comme $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(M_1 - 4M_4, M_2 + M_3 + 4M_4)$ et qu'il est de dimension 2, la famille $(M_1 - 4M_4, M_2 + M_3 + 4M_4)$ est une libre et maximale, c'est une base.