Jeudi 6 mars 2025 (4h)

Devoir Libre $n°4$

EN2D2 Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Vous êtes en autonomie et la note ne comptera pas. Nul doute que les plus intelligents sauront se mettre dans les conditions du concours. Pour les autres, tant pis pour eux. Qu'ils se noient dans leur médiocrité.

Exercice 1.

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1) a) Vérifier que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

b) On note F la fonction de répartition de Y. déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leq 0$.

2) Vérifier que la fonction G définie par

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

peut être considérée comme une fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

3) On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

4) a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Conclure que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Exercice 2.

On considère un nombre réel $a \in]0,1[$ et l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$$

1) **a)** Donner les valeurs propres de M_a.

b) Déterminer les sous-espaces propres associées à ces valeurs propres.

c) En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.

2) On note E l'espace vectoriel engendré pas I, M_a et M_a^2.

a) Quelle est la dimension de E ?

b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer JK^2 puis en déduire $(M_a - I)(M_a - aI)^2$.

c) En déduire que $M_a^3 \in E$.

3) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n), tel que

$$M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$$

On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrire les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n, w_n.

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

On admet que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme : $u_n = \dfrac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}$.

5) On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} w_n\right) I$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

b) En déduire la limite L_a, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

6) On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a.

Montrer que :

a) $\forall x \in \mathrm{Ker}(f_a - \mathrm{Id})$, $\varphi_a(x) = x$.

b) $\forall x \in \mathrm{Im}(f_a - \mathrm{Id})$, $\varphi_a(x) = 0$.

Exercice 3.

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : Un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants : Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. B) lors de la $k^{\text{ième}}$ manche.

On note, toujours pour $k \in \mathbb{N}^*$, E_k l'évènement : "Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ième}}$ manche".

On note E l'évènement : "Il y a perpétuellement égalité".

On note G (resp. H) l'évènement : "A (resp. B) gagne le jeu", et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'évènement : "A (resp. B) gagne le jeu à la $n^{\text{ième}}$ manche".

1) Etude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

b) Ecrire l'évènement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

c) Montrer que $P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i)$ et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de p et q.

d) Justifier sans aucun calcul que les évènements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

2) Calcul de la probabilité de l'évènement G.

a) Ecrire, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'évènement G_n à l'aide des évènements E_k et de l'évènement $(X_n < Y_n)$.

b) Pour tout entier $k \geq 2$, calculer $P_{E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2, \qquad P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que $P(G) = \dfrac{1}{2}$.

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'évènement H : "B gagne à ce jeu" et en déduire que ce jeu a presque surement une fin.

Partie 2 : Un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3) **a)** Montrer que $P(Y_1 = X_1 + 1) = \dfrac{pq}{1+q}$.

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4) **a)** Utiliser les évènements E_k pour écrire l'évènement K_n : "l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ième}}$ manche par un lancer d'écart", ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.

5) Donner finalement la probabilité de l'évènement K : "A gagne ce pari".

Correction Devoir Libre 4

Exercice 1.

1) a) Il faut que f soit continue sauf éventuellement en un nombre fini de points (ici en 0), positive (pas de souci ici) et pour l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^3}\exp\left(\frac{-1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

il faut d'abord vérifier qu'elle converge.

En $+\infty$: pas de problème car $\frac{2}{t^3}\exp\left(\frac{-1}{t^2}\right) \sim \frac{-2}{t^5}$ qui converge d'après les intégrales de Riemann de la forme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

En 0 : en posant $X = \frac{1}{t^2}$, on trouve $\lim\limits_{\substack{t>0\\t\to 0}} \frac{2}{t^3}\exp\left(\frac{-1}{t^2}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} 2X^{\frac{2}{3}}e^{-X} = 0$. Donc la fonction est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale converge en 0.

Il reste à la calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{t^3}\exp\left(\frac{-1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[\exp\left(\frac{-1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \boxed{1}\,.$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

b) On a clairement $F(x) = 0$ si $x \leq 0$.

Si $x > 0$, alors $F(x) = \int_0^x \frac{2}{t^3}\exp\left(\frac{-1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[\exp\left(\frac{-1}{t^2}\right)\right]_0^x = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.

2) La fonction G est dérivable (sauf en un nombre fini de point, en 1 ici), est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$.

Il s'agit donc bien d'une fonction de répartition.

3) a) On a

$$G_n(x) = P(M_n \leq x) = P(\max(X_1,\ldots,X_n) \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq x)\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x)$$

car les variables sont mutuellement indépendantes. Et comme $P(X_k \leq x) = P(X \leq x) = G(x)$.

Donc $G_n(x) = G(x)^n = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n$ si $x \geq 1$ (et $G_n(x) = 0$ sinon).

b) On a $P(Y_n \leq x) = P(M_n \leq \sqrt{n}x) = G_n(\sqrt{n}x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$ si $\sqrt{n}x \geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. (et 0 sinon)

4) a) Si $n > \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$, alors $n > \frac{1}{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 > \frac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $x > 0$

b) D'après le cours, on a $\ln(1+u) \sim u$ au voisinage de 0. Or

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{nx^2})}$$

Attention ! Comme on n'a pas le droit de composer des équivalents, on utilise les "o" : $\ln(1 - \frac{1}{nx^2}) = \frac{-1}{nx^2}) + o(\frac{1}{n})$. Ainsi,

$$F_n(x) = e^{n(\frac{-1}{nx^2})+o(\frac{1}{n}))} = e^{\frac{-1}{x^2}+o(1)}$$

D'où la limite quand $n \to +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$.

5) On a bien $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ avec F continue en x, d'où la convergence en loi.

Exercice 2.

1) a) Pour une matrice diagonale, les valeurs propres sont sur la diagonale. Donc $\text{Spec}(M_a) = \{1, a\}$. (On note que $a \neq 1$)

b) Avec les méthodes classiques du cours, on trouve $V_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $V_a = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

c) Comme la dimension algébrique associée à $\lambda = a$ vaut 2 mais que la dimension géométrique vaut 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

2) a) On détermine s'il existe une combinaison linéaire non triviale : Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha I + \beta M_a + \gamma M_a^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$

On trouve assez vite que $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$. Donc la famille est libre et $\dim E = 3$.

b) On trouve $JK^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Et comme $(M_a - I) = (1-a)J$ et $(M_a - aI) = (1-a)K$, $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

c) D'après ce qui précède, $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = M_a^3 - (1+2a)M_a^2 + (a^2+2a)M_a - a^2 I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Donc $M_a^3 = (1+2a)M_a^2 - (a^2+2a)M_a + a^2 I$. Ainsi, $M_a^3 \in E$.

3) a) On procède par récurrence en posant P_n : "il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n), tel que $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$."

Initialisation : Evident pour $n = 0$ en prenant $(u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 1)$.

Hérédité : On suppose P_n vraie pour n fixé.

On a

$$\begin{aligned} M_a^{n+1} &= M_a \times M_a^n = u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a \\ &= u_n((1+2a)M_a^2 - (a^2+2a)M_a + a^2 I) + v_n M_a^2 + w_n M_a \\ &= \underbrace{(v_n + (1+2a)u_n)}_{u_{n+1}} M_a^2 + \underbrace{(w_n - (a^+2a)u_n)}_{v_{n+1}} M_a + \underbrace{a^2 u_n}_{w_{n+1}} I \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4)

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= v_{n+2} + (1+2a)u_{n+2} \\ &= w_{n+1} - (a^2+2a)u_{n+1} + (1+2a)u_{n+2} \\ &= a^2 u_n - (a^2+2a)u_{n+1} + (1+2a)u_{n+2} \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n \end{aligned}$$

5) a) Il suffit de calculer $\lim_{n\to+\infty} na^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \ln a e^{n \ln a}}{\ln a} = \lim_{X\to-\infty} \frac{X e^X}{\ln a} = 0$ en posant $X = n \ln a$ (avec $a \in]0, 1[$).

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{(a-1)^2}$, ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{-2a}{(a-1)^2}$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{a^2}{(a-1)^2}$.

b) On en déduit que

$$L_a = \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 - \frac{2a}{(a-1)^2} M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) easy.

6) a) Si $x \in \mathrm{Ker}(f_a - \mathrm{Id})$, alors $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après la question 1.b., auquel cas il est facile de vérifier que $L_a x = x$.

b) De la même façon, si $x \in \mathrm{Im}(f_a - \mathrm{Id})$, alors $(M_a - I)x = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, mais l'image d'un tel vecteur par L_a donne le vecteur nul.

Exercice 3.

1) a) X_1 et Y_1 suivent une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p, $\mathscr{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$. Car l'expérience aléatoire est la répétition de schémas de Bernoulli identique et indépendant jusqu'au premier succès.

Dire que la manche dure infiniment signifie que les deux joueurs obtiennent face systématiquement à l'infini, d'où la quasi impossibilité de cet éventualité.

b) Dire qu'il y a égalité à la fin de la première manche signifie que les deux joueurs ont obtenu pile pour la première fois au même moment, i.e. $E_1 = (X_1 = Y_1)$.

c) On utilise le système complet d'évènement $(X_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. On a alors $E_1 = (X_1 = Y_1) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} ((X_1 = i) \cap (Y_1 = i))$.

Comme les évènements sont disjoints, on obtient

$$P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (Y_1 = i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) P(Y_1 = i)$$

car les variable X_1 et Y_1 sont indépendantes.

Comme $P(X_1 = i) = P(Y_1 = i) = q^{i-1}p$, on trouve

$$P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^{i-1}p\right)^2 = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p\cancel{^2}}{\cancel{p}(1+q)} = \boxed{\frac{p}{1+q}}$$

d) Le jeu est le même pour les deux joueurs car les pièces sont identiques. Donc $P(G_1) = P(H_1)$. Et comme $P(E_1) = \dfrac{p}{1+q}$, on trouve que

$$P(G_1) + P(H_1) + P(E_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2P(G_1) = 1 - \frac{p}{1+q} \quad \Leftrightarrow \quad P(G_1) = \boxed{\frac{q}{1+q}}$$

2) a) Pour qu'il y ait un gain à la manche n, il faut qu'il y ait eu égalité sur les manches précédentes et gain à la dernière, donc

$$G_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap (X_n < Y_n).$$

b)

3) a) Avec le système complet d'évènements $(X_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.