Samedi 15 mars 2025 (4h)

Devoir Surveillé $n°$5

EN2D2 — Lycée Gustave Eiffel

Les documents ne sont pas autorisés. Les doudous (y compris portables et calculatrices) sont éteints, rangés dans les sacs, eux-mêmes déposés au fond de la salle ou au pied du tableau.

Exercice 1.

Partie A.

1) Dans cette question uniquement, on considère que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer AB et BA.

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de AB et de BA.

Soient A et B deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit λ une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé.

a) Justifier que $BX \neq 0$.

b) Montrer que BX est un vecteur propre de BA et λ est une valeur propre de BA.

3) Supposons que 0 est une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé.

a) Supposons que B est inversible.
Justifier que $BX \neq 0$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.

b) Supposons que B n'est pas inversible.
Montrer que $\mathrm{rg}(BA) < n$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.

4) Montrer que AB et BA ont le même spectre.

5) Les matrices AB et BA ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

Partie B.

On considère A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Soit B une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

1) Supposons qu'il existe un n-uplet de réels tous nuls $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.

a) Justifier que A admet un polynôme annulateur non nul Q de degré inférieur au égal à $n-1$.

b) En étudiant les racines de ce polynôme Q annulateur de A, aboutir à une contradiction.

c) Que peut-on déduire sur la famille $(I, A, \ldots A^{n-1})$?

2) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

a) Justifier que l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel engendré par X.

b) Exprimer de deux manières différentes BAX.

c) En déduire que $BX \in \mathrm{Vect}(X)$.

3) Déduire de ce qui précède que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

4) a) Justifier qu'il existe une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A et de B tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$.

b) Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on note μ_i le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$.
Montrer que $\mathrm{Spec}(AB) = \{\lambda_i \mu_i,\ i \in [\![1, n]\!]\}$.

5) a) Montrer que l'application $\varphi : P \longmapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $BX_i = P(\lambda_i) X_i$.

c) Montrer que $B = P(A)$.

6) a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{C}(A) = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.

c) Déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ et $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x}{n^2 - x^2}$.

Dans toute la suite, on notera D l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers relatifs $D = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Enfin, on note T l'opérateur défini sur E par $\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$,

$$[T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Partie A. Etude de φ.

1) Montrer que si $x \in D$, alors la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente.

2) a) Déterminer la parité de φ.

b) Trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{2x}{n^2 - x^2} = \dfrac{\alpha}{n-x} - \dfrac{\beta}{n+x}$.

c) Montrer que φ est périodique de période 1.

3) Continuité de φ.

a) Justifier que $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n-x}\right) - \left(\dfrac{1}{n+x}\right)$.

b) Vérifier que $\forall x \in D$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} - g(x)$.

c) Soit $h \in \left]\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, montrer que $\forall x \in [0,1]$, $|g(x+h) - g(x)| \leq C|h|$ où $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2}{(n-1)\left(n - \frac{3}{2}\right)}$.

d) En déduire que g est continue sur $[0,1]$ puis que φ est continue sur $]0,1[$

4) a) Montrer que $\varphi(x) \sim \dfrac{1}{x}$ en 0 et que $\lim_{x \to 0} \left(\varphi(x) - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

b) Procéder à la même étude en $x = 1$.

Partie B. Etude de l'opérateur T.

Dans toute cette partie, on note $e_k(x) = x^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note aussi $\mathscr{B}_n = (e_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ la base de $F_n = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_n)$.

1) Montrer que T est un endomorphisme de E.

2) Etude de T sur F_n.

a) Vérifier que F_n est stable par T, i.e. pour tout $f \in F_n$, $T(f) \in F_n$.
On note dans la suite T_n l'endomorphisme T réduit à F_n.

b) Déterminer la matrice de T_n dans la base $\mathscr{B}_n$.

c) Quelles sont les valeurs propres de T_n ? L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ?

3) Etude de $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}_E)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Soit $f \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}_E)$. On note $m = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0,1]} f(x)$. On fixe $(x_0, x_1) \in [0,1]^2$ tel que $f(x_0) = m$ et $f(x_1) = M$.

b) Montrer que $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = m$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$.

d) En déduire que $m = f(0)$.

e) Faire une étude similaire pour M.

f) Conclure que f est constante.

Exercice 3. *Racine d'une matrice carrée.*

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On cherche à déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ et, si c'est le cas, à décrire l'ensemble des solutions de cette équation, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

a) Montrer que $AM = MA$.

b) Montrer que A est inversible si et seulement si M est inversible.

2) On considère dans cette question $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est solution de $M^2 = A$ alors $a = d$ et $b = -c$.

c) Montrer alors que $M^2 = A$ admet deux solutions que l'on expliquera.

3) On considère dans cette question $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique.

a) A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que $M^4 \neq (0)$ et que $M^6 = (0)$. On note alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, M^k = (0)\}$.

c) Montrer qu'il existe un vecteur non nul u de $\mathbb{R}^3$ tel que $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{p-1}(u))$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

d) Conclure.

4) Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = I$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représentée par M dans la base canonique.

a) Déterminer un polynôme annulateur de M et les valeurs propres possibles de M.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

c) En déduire que f est diagonalisable.

d) En déduire que les solutions de $M^2 = I$ sont semblables à des matrices diagonales que l'on déterminera.

5) On suppose dans cette question que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ où les réels λ_i vérifient

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

a) Justifier qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

b) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Montrer que $M^2 = A$ si et seulement si $N^2 = D$.

c) Montrer que N est diagonale.

d) L'équation $M^2 = A$ a-t-elle des solutions si A admet au moins une valeur propre strictement négative ?

e) Décrire l'ensemble des solutions dans le cas où toutes les valeurs propres sont positives.

Correction Devoir Surveillé 5

Exercice 1.

Partie A.

1) a) On trouve $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Les matrices sont triangulaires, donc les valeurs propres sont sur la diagonale. On trouve donc $\mathrm{Spec}(AB) = \mathrm{Spec}(BA) = \{-1; 2\}$.

On cherche les vecteurs propres comme d'habitude avec la méthode du cours et on trouve

- pour AB : $V_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $V_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
- pour BA : $V'_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $V'_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2) a) Par l'absurde, si $BX = 0$, alors $ABX = 0$. Contradiction avec le fait que $ABX = \lambda X$ et que X et λ sont non nuls.

b) On a $BA.BX = B.ABX = B.\lambda X = \lambda BX$ car $ABX = \lambda X$. Donc BX est vecteur propre de BA associé à λ.

3) a) Si B est inversible, alors $\mathrm{Ker}\, B = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Comme X est un vecteur propre, il est non nul et $BX \neq 0$.

b) Si B n'est pas inversible, cela signifie que $\dim \mathrm{Ker}\, B > 0$. Le théorème du rang donne $\mathrm{rg}\, B = \dim \mathbb{R}^n - \dim \ker B < n$.

Comme $\ker B \neq \{0\}$, alors il existe un vecteur X non nul tel que $BX = 0$ et $0 \in \mathrm{Spec}\, B$.

4) On vient de démontrer que si $\lambda \in \mathrm{Spec}(AB)$, alors $\lambda \in \mathrm{Spec}(BA)$ qu'elle soit nulle ou pas. De la même façon, on a l'implication dans l'autre sens par le même raisonnement.

5) La question 1 fournit un contre-exemple. Donc non.

Partie B.

1) a) On pose $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k = 0$ qui est un polynôme annulateur de A.

b) Les racines des polynômes annulateurs contiennent les valeurs propres de la matrice. Donc, si l'on note S l'ensemble des racines de Q, on a $\mathrm{Spec}(A) \subset S$. Mais on sait que A possède n valeurs propres distinctes, donc $\mathrm{card}(\mathrm{Spec}(A)) = n$. Mais, comme $\deg(Q) = n-1$, on a, $\mathrm{card}(S) \leq n-1$. Contradiction.

c) On peut en déduire que la famille est liée. En effet, il existe une combinaison linéaire non triviale (i.e. $\alpha_k \neq 0$) telle que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = (0)$.

2) a) Les sous-espaces propres sont de dimension au moins 1. Mais A possède n valeurs propres distinctes, et comme $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} V_{\lambda_k} \subset \mathbb{R}^n$, on a l'égalité en considérant les dimensions. Donc $\dim V_{\lambda_k} = 1$ et X est générateur.

b) D'une part, on a $BAX = B.\lambda X = \lambda BX$ et d'autre part, $BAX = ABX$ car $AB = BA$.

c) De la question précédente, $A.BX = \lambda BX$, donc BX est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Mais comme $V_\lambda = \mathrm{Vect}\,(X)$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $BX = \mu X$.

3) De ce qui précède, on déduit que si X est vecteur propre de A, alors $BX = \mu X$ et X est vecteur propre de B associé à μ.

4) a) A chaque valeur propre λ_k de A, on associe X_k un vecteur propre. D'après ce qui précède, X_k est aussi vecteur propre de B.

La famille $(X_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est donc une base comme demandée.

b) Soit X_k dans la base précédente. On a alors $ABX_k = A(\mu_k X_k) = \mu_k(AX_k) = \mu_k \lambda_k X_k$. Donc $\lambda_k \mu_k \in \mathrm{Spec}(AB)$. Comme ceci est vrai pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et qu'il y a au plus n valeurs propres, on a l'égalité $\mathrm{Spec}(AB) = \{\lambda_k \mu_k,\ k \in [\![1,n]\!]\}$.

5) a) L'application est linéaire, car pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + \beta Q) &= ((\alpha P+\beta Q)(\lambda_1), (\alpha P+\beta Q)(\lambda_2), \dots, (\alpha P+\beta Q)(\lambda_n)) \\ &= (\alpha P(\lambda_1), \alpha P(\lambda_2), \dots, \alpha P(\lambda_n)) + (\beta Q(\lambda_1), \beta Q(\lambda_2), \dots, \beta Q(\lambda_n)) \\ &= \alpha(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)) + \beta(Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), \dots, Q(\lambda_n)) \\ &= \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q).\end{aligned}$$

On détermine le noyau $\operatorname{Ker}\varphi$. On cherche donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ non nul tel que $(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)) = 0_{\mathbb{R}^n}$, i.e. $P(\lambda_k) = 0\ \forall k \in [\![1,n]\!]$. Mais les λ_k sont toutes distinctes, donc on a trouvé n racines pour un polynôme de degré $n-1$. Contradiction.

Donc P est le polynôme nul et $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$. Ainsi, φ est injective. Mais comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{R}^n$, φ est un isomorphisme.

b) Comme φ est un isomorphisme, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Auquel cas, on a bien $BX_i = P(\lambda_i)X_i$.

c) Comme les X_i forment une base de $\mathbb{R}^n$, on a pour tout vecteur $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ et

$$BX = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i BX_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(\lambda_i) X_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k \underbrace{\lambda_i^k X_i}_{=A^k X_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A) X_i = P(A) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = P(A)X.$$

Donc $B = P(A)$.

6) a) On a, par définition $\mathscr{C}(A) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice nulle est clairement dans l'ensemble donc il est non vide. Soient B et B' deux matrices de $\mathscr{C}(A)$, et soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$A(\alpha B + \beta B') = \alpha AB + \beta AB' = \alpha BA + \beta B'A = (\alpha B + \beta B')A$$

Donc l'ensemble est stable pour la combinaison linéaire et il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Par double inclusion : D'après l'étude précédente, si $B \in \mathscr{C}(A)$, alors il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Pour l'autre inclusion, si $B = P(A)$, on a facilement $B \in \mathscr{C}(A)$ car $AB = A \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k A^{k+1} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k A^k \right).A$.

D'où l'égalité.

c) Du fait de la bijection précédente, les deux espaces sont de même dimension, i.e. $\dim \mathscr{C}(A) = n$.

Exercice 2.

Partie A.

1) On a $\dfrac{2x}{n^2 - x^2} \sim \dfrac{2x}{n^2}$ donc la série converge d'après Riemann car $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge quand $\alpha > 1$.

2) a) $\varphi(-x) = \dfrac{1}{-x} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-2x}{n^2 - (-x)^2} = -\varphi(x)$.

b) Avec les techniques du cours, on trouve $(\alpha,\beta) = (1,1)$.

c)

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) &= \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x-1} - \frac{1}{n+x+1}\right)\\
&= \frac{1}{x+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n-x} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+x}\\
&= -\frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x}\\
&= \varphi(x)
\end{aligned}$$

3) a) D'après la question 2b.

b) $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2} = \frac{1}{x} - \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}}_{=g(x)} - \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{x} - g(x) - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$.

c)

$$\begin{aligned}
|g(x+h)-g(x)| &= \left|\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-(x+h)} - \frac{1}{n+(x+h)}\right) - \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)\right|\\
&= \left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-h}{(n-x)(n-(x+h))} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-h}{(n+x)(n+(x+h))}\right|\\
&= |h|\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)(n-(x+h))} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+(x+h))}\right|\\
&= |h|\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-x)(n-(x+h))} + \frac{1}{(n+x)(n+(x+h))}\right)\right|\\
&= |h|\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n+x)(n+(x+h)) + (n-x)(n-(x+h))}{(n+x)(n+(x+h))(n-x)(n-(x+h))}\right|\\
&= |h|\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2(n^2+x^2+xh)}{(n^2-x^2)(n^2-(x+h)^2)}\right|
\end{aligned}$$

Mais $x \in [0,1]$ et $h \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. Donc,

$$\begin{aligned}
|g(x+h)-g(x)| &\leq |h|\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2\left(n^2+\frac{3}{2}\right)}{(n^2-1)\left(n^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}\right|\\
&\leq |h|\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)} \times \frac{n^2+\frac{3}{2}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)}\right|
\end{aligned}$$

Il suffit de voir que $\dfrac{n^2+\frac{3}{2}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)} \leq 1$ ce qui est évident quand on développe : $n^2 + \frac{3}{2} \leq$

$n^2+\frac{5}{2}n+\frac{3}{2}$.

d) Avec ce qui précède, pour tout $x\in[0,1]$, on a $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$, donc g est continue en x ; donc sur $[0,1]$.

Comme $x\longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1[$, alors par somme φ est continue sur $]0,1[$.

4) a) On a $x\varphi(x)=1-\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x}{1+x}-xg(x)$. Or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+x}=0$. Pour $\lim\limits_{x\to 0} xg(x)=0$ car $g(x)=2x\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2-x^2}$. Or $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2-x^2}$ converge.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} x\varphi(x)=1$ et $\varphi(x)\sim\dfrac{1}{x}$.

b) De la même façon, on a $(x-1)\varphi(x)=\dfrac{x-1}{x}+1+\dfrac{x-1}{x+1}-(x-1)g(x)$. Et comme $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$ et que, là encore $g(x)$ est bornée en 1, alors $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\varphi(x)=1$, ce qui donne $\varphi(x)\sim\dfrac{1}{x-1}$.

Partie B.

1) Pour tout $(f,g)\in E^2$ et tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on calcule

$$\begin{aligned}[T(\lambda f+\mu g)](x)&=(\lambda f+\mu g)\left(\frac{x}{2}\right)+(\lambda f+\mu g)\left(\frac{x+1}{2}\right)\\&=\lambda\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+\mu\left(g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\\&=\lambda[T(f)](x)+\mu[T(g)](x)\end{aligned}$$

Donc T est linéaire.

D'autre part, il suffit de vérifier que $T(f)\in E$, i.e. continue sur $[0,1]$.

2) a) Il suffit de vérifier que $T(e_k)\in F_n$.

Or $[T(e_k)](x)=\left(e_k\left(\frac{x}{2}\right)+e_k\left(\frac{x+1}{2}\right)\right))=\dfrac{x^k}{2^k}+\dfrac{(x+1)^k}{2^k}=\dfrac{1}{2^k}\left(\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i+x^k\right)$ qui est bien combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in[\![0,k[\![}$.

b) D'après ce qui précède,

$$\mathrm{Mat}(T_n)=\begin{pmatrix}2&\frac12&\frac14&\cdots&\frac{1}{2^k}&\cdots&\frac{1}{2^n}\\0&1&\frac14\binom{2}{1}&\cdots&\frac{1}{2^k}\binom{k}{1}&\cdots&\frac{1}{2^n}\binom{n}{1}\\0&0&\frac12&\cdots&\cdots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\frac{2}{2^k}&\cdots&\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\frac{2}{2^n}\end{pmatrix}$$

c) La matrice est triangulaire, les valeurs propres sont donc sur la diagonale : $\mathrm{Spec}(T_n)=\{2,1,\frac12,\frac14,\dots,\frac{1}{2^{n-1}}\}$.

Les valeurs propres sont toutes distinctes et comme les sous-espaces propres sont tous de dimension au moins 1, on a bien $\oplus_{i=0}^n V_{\lambda_i}=F_n$.

3) a) On a $e_0\in\mathrm{Ker}(T-2\,\mathrm{Id}_E)$ d'après ce qui précède.

b) On a $f(\frac{x_0}{2})+f(\frac{x_0+1}{2})=2f(x_0)=2m$. Mais comme $f(x_0)$ est le minimum de f sur $[0,1]$, alors $f(\frac{x_0}{2})\geq m$ et $f(\frac{x_0+1}{2})\geq m$. Ce qui donne bien $f(\frac{x_0}{2})=f(\frac{x_0+1}{2})=m$.

c) Il suffit de faire un récurrence en posant $\frac{x_0}{2}$ dans la propriété précédente.

d) Par continuité en 0 de f, on $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=f\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_0}{2^n}\right)=f(0)$. Donc $m=f(0)$.

e) De la même façon en posant $f(\frac{x_1}{2})+f(\frac{x_1+1}{2})=2f(x_1)=2M$. On a $f(\frac{x_1}{2})\leq M$ et $f(\frac{x_1+1}{2})\leq M$. Donc $f(\frac{x_1}{2})=M$.

Par récurrence immédiate, on a encore $f(\frac{x_1}{2^n})=M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{x_1}{2^n})=M \quad\Leftrightarrow\quad f(0)=M$.

f) Comme $m=M$, on a f constante.

Exercice 3.

1) a) $AM=M^2M=MM^2=MA$.

b) Si M est inversible, alors $A=M^2$ est inversible car $A(M^{-1})^2=M^2(M^{-1})^2=I$.

Si A est inversible, alors $A^{-1}A=I \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}M^2=I \quad\Leftrightarrow\quad (A^{-1}M)M=I$. Donc $A^{-1}M=M^{-1}$.

2) a) $A^2=-I$. On calcule le polynôme caractéristique : $\chi_A(X)=\det(XI-A)=X^2+1$. Ce polynôme n'admet pas de racine réelle, donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) $M^2=A \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a^2+bc &=0\\ ab+bd &=1\\ ac+cd &=-1\\ bc+d^2 &=0\end{cases}$

En faisant L_1-L_4 : $a^2-d^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (a-d)(a+d)=0$. Par disjonction de cas, on a

- Si $a=-d$, alors $b(a+d)=0\neq 1$. Contradiction.
- Si $a=d$, alors avec L_2+L_3 : $(b+c)(a+d)=0$ donc, soit $a=d=0$, contradiction d'après ce qui précède, soit $a\neq 0$, auquel $b=-c$.

En conclusion, $a=d$ et $b=-c$.

c) On résout le système précédent et on trouve $a^2-b^2=0$ et $2ab=1$. Ce qui donne $a=b=\dfrac{\pm1}{\sqrt{2}}$.

Donc

$$M=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

3) a) La matrice étant triangulaire, les valeurs propres sont sur la diagonale. Ici $\mathrm{Spec}(A)=\{0\}$. Par l'absurde, si A était diagonalisable, il existerait une matrice de passage P et une matrice diagonale D constituée des valeurs propres (ici la matrice nulle) telles que $A=PDP^{-1}=(0)$ contradiction.

b) On a $M^4=A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ et $M^6=A^2\times A=(0)$.

c) Raisonnement classique : il suffit de considérer un vecteur u tel que $f^{p-1}(u)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Il en existe un car sinon, on aurait $M^{p-1}=(0)$, ce qui n'est pas vrai car p est minimal. On écrit une combinaison linéaire $\lambda_0 u+\lambda_1 f(u)+\cdots+\lambda f^{p-1}(u)=0_{\mathbb{R}^3}$.

En composant par f^{p-1}, on trouve $\lambda_0 f^{p-1}(u)+\underbrace{\lambda_1 f^p(u)+\cdots+\lambda f^{2p-2}(u)}_{=0}=0_{\mathbb{R}^3} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_0=0$.

Et par récurrence fini en composant successivement par f^{p-2}, f^{p-3} ...on trouve $\lambda_i=0$ pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$.

Donc la famille est libre.

d) Donc la famille étant libre dans $\mathbb{R}^3$, elle est de cardinal au plus 3, ce qui donne $p-1\leq 2 \quad\Leftrightarrow\quad p\leq 3$. Contradiction avec le fait que $M^4\neq(0)$.

Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

4) a) X^2-1 est polynôme annulateur. Les racines de ce polynôme contiennent donc les valeurs propres, i.e. $\mathrm{Spec}(M)\subset\{-1,1\}$.

b)
- Soit $x\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})\cap\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$, alors $f(x)=x$ et il existe y tel que $f(y)-y=x$. En composant par f, on trouve $f^2(y)-f(y)=f(x) \quad\Leftrightarrow\quad y-f(y)=x$. Mais $f(y)-y=x$, donc $x=-x \quad\Leftrightarrow\quad x=0$.

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on écrit $x = \frac{1}{2}(x+f(x)) + \frac{1}{2}(x-f(x))$. On a $\frac{1}{2}(x+f(x)) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ et $\frac{1}{2}(x-f(x)) \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$.

Donc les deux espaces sont supplémentaires.

c) On a $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$, donc les deux sous-espaces propres sont de dimensions maximales et la matrice est diagonalisable dans une bas constituée de vecteurs de base de $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$ et de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$.

d) Elles sont semblables à $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.

5) **a)** Les valeurs propres étant toutes distinctes, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 et comme il y en a n, on $\oplus_{i=1}^n V_{\lambda_i} = \mathbb{R}^n$, d'où la possibilité de diagonaliser $A = PDP^{-1}$.

b) $M^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}MMP = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad N^2 = D$.

c) Utiliser la question 1.

d) Non car on aura alors, e.g. $\lambda_1 < 0$ et comme N est diagonale, on devrait avoir $n_{11}^2 = \lambda_1$. Contradiction dans $\mathbb{R}$.

e) Il suffit d'écrire $N = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et de composer par n'importe quelle matrice de passage.