Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(1+\cos(2\theta))z^2 - (2\sin(2\theta))z + 2 = 0$$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exercice 2.

Optimiser la fonction

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$$

sous la contrainte $2x - y + z = 3$.

Exercice 3.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. Montrer que, pour tous les éléments A et b de $\mathcal{A}$:

$$p(A \cap B) - p(A)p(B) \leq \frac{1}{4}$$

(on pourra commencer en supposant que $p(A) \leq p(B)$.

Peut-on avoir l'égalité ?

Exercice 4.

Paul a dans sa poche deux boîtes d'allumettes indiscernables ; l'une contient cinq allumettes, l'autre deux. Il choisit au hasard une des boîtes, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de cigarettes allumées avant de jeter une des deux boîtes.

1) Déterminer la loi de X.

2) Calculer l'espérance $E(X)$.

Correction Oral de l'ENSAI - Compléments 2012

Exercice 1.

On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = (2\sin(2\theta))^2 - 8(1+\cos(2\theta)) = 4(1-\cos^2(2\theta)) - 8(1+\cos(2\theta)) = -4(\cos(2\theta)+1)^2.$$

On obtient donc deux racines $z_\pm = \dfrac{\cancel{2}\sin(2\theta) \pm \cancel{2}i(\cos(2\theta)+1)}{\cancel{2}(1+\cos(2\theta))} = \dfrac{\sin(2\theta)}{1+\cos(2\theta)} \pm i$. D'où le module (qui est le même car les racines sont complexes conjuguées :

$$|z_+| = |z_-| = \frac{\sqrt{\sin^2(2\theta) + (\cos(2\theta)+1)^2}}{1+\cos(2\theta)} = \frac{\sqrt{1 - \cancel{\cos^2(2\theta)} + \cancel{\cos^2(2\theta)} + 2\cos(2\theta) + 1}}{1+\cos(2\theta)} = \sqrt{\frac{2}{1+\cos(2\theta)}}.$$

Comme ils sont conjugués complexes, il suffit de calculer l'argument de z_+, celui de z_- étant alors son opposé.

En posant $\alpha = \arg(z_+)$, on a alors $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|$.

Exercice 2.

On peut utiliser les multiplicateurs de Lagrange, mais il est bien plus facile ici d'utiliser la contrainte pour simplifier l'étude de fonction par substitution. On est ramené à étudier $g(x,z) = f(x, 2x+z-3, z) = 5x^2 + 3z^2 + +4xz - 12x - 6z + 9$.

On calcule alors les dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 10x + 4z - 12 \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 4x + 6z - 6$$

La recherche des point critiques donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x + 2z - 6 = 0 \\ 2x + 3z - 3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,z) = (\tfrac{12}{11}, \tfrac{3}{11}).$$

On calcule $g(\frac{12}{11}, \frac{3}{11}) = \frac{18}{11}$.
Une décomposition de Gauss de $g(x,z) - \frac{18}{11}$ donne :

$$g(x,z) = 3(z + \tfrac{2}{3}x - 1)^2 + \tfrac{11}{3}(x - \tfrac{12}{11})^2 > 0.$$

Ainsi, le minimum de f sous la contrainte est atteint pour $(\frac{12}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{3}{11})$.

Exercice 3.

Il suffit de voir que $p(A\cap B) \leq p(A)$. Et en supposant $p(A) \leq p(B)$, on trouve

$$p(A\cap B) - p(A)p(B) \leq p(A) - p(A)^2.$$

Une rapide étude de la fonction $f : x \longmapsto x - x^2$ sur $[0;1]$ montre que son maximum vaut $\frac{1}{4}$ atteint en $\frac{1}{2}$. (De même par symétrie pour $p(B) \leq p(A)$). Ainsi, l'égalité est vérifiée en prenant par exemple $A = B$ et $p(A) = \frac{1}{2}$.

Exercice 4.

1) Un calcul élémentaire donne

x_i	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{32}$

Par exemple, pour $p(X = 5)$, on appelle A l'évènement "tirer la boîte ayant cinq allumettes au début" et B l'évènement "tirer la boîte ayant deux allumettes au début". On calcule le nombre de combinaisons qui vident la première boîte : il n'y en a qu'une : $AAAAA$; ainsi que le nombre de combinaisons qui vident la seconde boîte : Il est nécessaire et suffisant que la combinaison finisse par un B et ne possède qu'un seul B auparavant, soit $AAABB$, $AABAB$, $ABAAB$ ou $BAAAB$. Autrement dit, il y en a $\binom{4}{1}$. Chacun de ces évènement à la même probabilité de se produire, soit $\frac{1}{2^5}$. D'où la probabilité cherchée : $p(X = 5) = \frac{1}{32} + \frac{4}{32} = \frac{5}{32}$.

2) On utilise le tableau précédent :

$$E(X) = \sum_{n=2}^{6} np(X = n) = \boxed{\frac{119}{32}}.$$