Exercice 1.

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

L'objet de cet exercice est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation (E) d'inconnue M suivante : $M^2 = A$.
1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2) Démontrer que si M est une solution de (E), alors les matrices A et M commutent et tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M.
3) En déduire que toute solution de (E) est diagonalisable et déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 2.

On considère pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n (\ln x)^2 \qquad \text{si} \qquad x > 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(0) = 0.$$

On appelle $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
On précise par ailleurs : $e \simeq 2,7$ et $e^2 \simeq 7,4$.
1) Montrer que pour $n \geq 2$, la limite de f_n en 0 est 0. La fonction f_n est-elle continue sur $[0; +\infty[$?
2) Dans cette question, on choisit $n = 1$.
a) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[$, on a $f_1(x) = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$.
En déduire la limite de f_1 en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f_1 en 0.
c) Dresser le tableau de variation de f_1.
d) Construire la courbe $\mathcal{C}_1$ en précisant la tangente au point 0.

Exercice 3.

On considère la fonction f telle que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

1) Montrer que f est bien définie sur $]0; +\infty[$.
2) Montrer que la fonction u définie par $u(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}$ admet une primitive U sur $]0; +\infty[$; exprimer f à l'aide de U.
3) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée.
4) Calculer pour tout $x \in]0; +\infty[$ la fonction $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$.
5) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, et étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement.
6) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $f(x) \leq e^{-x} \ln 3$. En déduire l'allure de la branche infinie de la courbe représentative de f.
7) Etudier les variations de f et tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 4.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les n boules de l'urne, une à une et sans remise. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$: on dit que le k-ième tirage est une rencontre si la boule numérotée k sort au k-ième tirage. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de rencontres au cours des n tirages.

1) Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ soit A_i l'évènement : "le i-ième tirage est une rencontre". Quelle est la probabilité de A_i ?

2) Si i et j sont différents, quelle est la probabilité de $A_i \cap A_j$?

3) Exprimer X à l'aide des variables aléatoires indicatrices B_i des évènements A_i. En déduire l'espérance de X.

4) Si i et j sont différents, calculer la covariance de B_i et B_j. En déduire la variance de X.

5) Exprimer l'évènement $(X \neq 0)$ à l'aide des A_i.

6) Si $k \geq 2$ et si $i_1, \ldots, i_k$ sont tels que $i_1 < \cdots < i_k$, quelle est la probabilité de $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$?

7) Déterminer la probabilité de l'évènement $(X \neq 0)$ puis montrer que :

$$p(X = 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

8) Quelle est la limite de $p(X = 0)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5.

On dispose de trois urnes. La première contient deux boules numérotées 1 et 2 ; la deuxième contient trois boules numérotées 1, 2, 3 ; la troisième contient quatre boules numérotées 1, 2, 3, 4.

1) On choisit une urne au hasard et on tire dans cette urne une boule au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de X. Calculer l'espérance et la variance de X.

2) On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne. On constate qu'elle porte le numéro 1. Calculer la probabilité pour que l'on ait choisi la première urne.

3) On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne. On constate qu'elle porte le numéro 1. On remet alors la boule dans l'urne tirée et on choisit de nouveau une boule dans cette même urne. Soit Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de Y.

4) On choisit une urne au hasard et on effectue n tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages donnant une boule numérotée 1. Donner la loi de Z et calculer l'espérance de Z.

Exercice 6.

Soit N le nombre de poissons dans un étang. On prélève dans l'étang un échantillon de m poissons que l'on marque et que l'on rejette dans l'étang. On propose deux méthodes différentes pour estimer N.

• Première méthode : soit $n \in \{1, \ldots, m\}$. On prélève des poissons dans l'étang au hasard, en les remettant dans l'étang après chaque prélèvement, jusqu'à ce que l'on obtienne n poissons marqués. Soit X_n le nombre de poissons qu'il a été nécessaire de pêcher pour cela.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_n (on interprétera X_n comme une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique).

2) Déduire de X_n un estimateur sans biais A_n de N ; cet estimateur est-il convergent ?

• Seconde méthode : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prélève n poissons au hasard, en les remettant dans l'étang après chaque prélèvement, et on note Z_n le nombre de poissons prélevés qui étaient marqués.

3) Déterminer la loi de Z_n, calculer l'espérance et la variance de Z_n.

4) Déduire de Z_n un estimateur B_n de $\dfrac{1}{N}$.

5) On considère la fonction réelle de variable réelle f définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k x^{k+1}.$$

Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$f(x) = \int_0^x (1-p+pt)^n dt.$$

En déduire la valeur de $f(1)$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \dfrac{m(n+1)}{Z_n+1}$. Montrer que C_n est un estimateur de N.

Exercice 7.

Dans tout l'exercice, λ est un nombre réel strictement positif fixé.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt$. Montrer que $I_n = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

2) Soient a un nombre réel et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f(t) = at^n e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ si $t < 0$. Déterminer a de façon que f soit la densité d'une loi de variable aléatoire X_n. Montrer que X_n admet une espérance et une variance et les calculer. Quels résultats retrouve-t-on pour $n = 0$?

3) On suppose que pour tout réel $t > 0$, le nombre de personnes qui passent une porte de magasin durant un temps t est une variable aléatoire X_t qui suit une loi de Poisson de paramètre λt. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'ouverture du magasin et le moment où la n-ième personne franchit la porte du magasin. Comparer les évènements $(T_n \leq t)$ et $(X_t \geq n)$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p(X_t \geq n) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p(X_t = k)$.

5) Déduire de ce qui précède l'expression de la fonction de répartition de la loi de T_n sous la forme d'une somme finie.

6) Déterminer la densité de la loi de T_n.

Exercice 8.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $f^2 - 4f + 4\,\mathrm{Id} = 0$. En déduire que $f \circ (4\,\mathrm{Id} - f) = 4\,\mathrm{Id}$.

2) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner son inverse f^{-1} en fonction de f.

3) Soient $e'_1 = e_1$, $e'_2 = f(e'_1) - 2e'_1$. Montrer que $e'_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$; le compléter par un vecteur e'_3 en une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

4) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E et déterminer la matrice A' de f dans cette base.

5) Soit $B' = A' - 2I_3$. Calculer B'^2 ; En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A'^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B'$.

6) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ et soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe une famille génératrice $(a_1, \ldots, a_p)$ de p vecteurs deux à deux distincts de E telle que l'on ait :

$$u(a_1) = a_2,\ u(a_2) = a_3,\ \ldots\ , u(a_{p-1}) = a_p,\ u(a_p) = a_1.$$

1) Montrer que $u^p = \mathrm{Id}$ et que $k < p$ alors $u^k \neq \mathrm{Id}$.

2) Montrer que (a_1, a_2) est une base de E. Donner la première colonne de la matrice de u dans cette base.

3) Déterminer la deuxième colonne de la matrice de u dans les cas suivants : $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$.

Exercice 10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

2) Monter que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2 I_{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

4) Donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 4 et soit u un endomorphisme de E tel que :

$$u^2 + u + \mathrm{Id} = 0.$$

1) Prouver que si $x \in E$ est non nul, alors la famille $(x, u(x))$ est libre.
2) Soient x et y deux éléments non nuls de E. On suppose que y n'est pas combinaison linéaire de $(x, u(x)$. Montrer que la famille $(x, u(x), y, u(y))$ est une base de E.
3) Donner la matrice de u dans la base de E définie au 2.
4) Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3, existe-t-il un endomorphisme u de E tel que $u^2 + u + \mathrm{Id} = 0$?

Correction Oral de l'ENSAI 2012

Exercice 1.

1) On trouve pour valeurs propres : $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 4, 9\}$ et pour vecteurs propres correspondants : $v_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $v_4 = {}^t(1, 3, 0)$ et $v_9 = {}^t(13, 24, 40)$.

2) On a $AM = M^3 = MA$.

Si u est un vecteur propre de A, alors $Au = \lambda u$. De plus, $A(Mu) = M(Au) = M(\lambda u) = \lambda(Mu)$. Donc Mu est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Or les sous-espaces propres de A sont tous de dimension 1, donc $Mu = \lambda' u$. Ainsi u est vecteur propre de M.

3) On a donc $\mathrm{card}\,\mathrm{Spec}(M) = 3$. Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1 et la matrice est diagonalisable.

On détermine les valeurs propres avec la relation : $\lambda u = Au = M^2u = M(Mu) = M(\lambda' u)\lambda' Mu = \lambda'^2 u$. Donc $\lambda'^2 = \lambda$. Ainsi, les valeurs propres sont les $8 = 2^3$ triplets choisis dans $\{\pm 1\} \times \{\pm 2\} \times \{\pm 3\}$. Dans la base (v_1, v_4, v_9), on trouve donc les matrices

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

Pour obtenir les matrices M, il suffit de multiplier par P et P^{-1} avec

$$P = \begin{pmatrix}1&1&13\\0&3&24\\0&0&40\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{8}\\0&\frac{1}{3}&\frac{-1}{5}\\0&0&\frac{1}{40}\end{pmatrix}$$

On calcule donc tous les PDP^{-1} avec pour D chacune des huit matrices précédentes.

Exercice 2.

1) On sait que $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} x^{n-2}(x\ln x)^2 = 0 = f_n(0)$ car $n-2 \geq 0$. Ainsi, la fonction f_n est continue à droite en 0.

D'autre part, $x \longmapsto x^n$ est continue en tant que polynôme sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto (\ln x)^2$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que carré d'une fonction de référence. donc f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

2) a) On a $f_1(x) = x(\ln x)^2 = x(2\ln\sqrt{x})^2 = 4x(\ln\sqrt{x})^2 = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$.

On pose le changement de variable $X = \ln\sqrt{x}$ et on trouve $\lim\limits_{\substack{X>0\\X\to 0}} 4(X\ln X) = 0$.

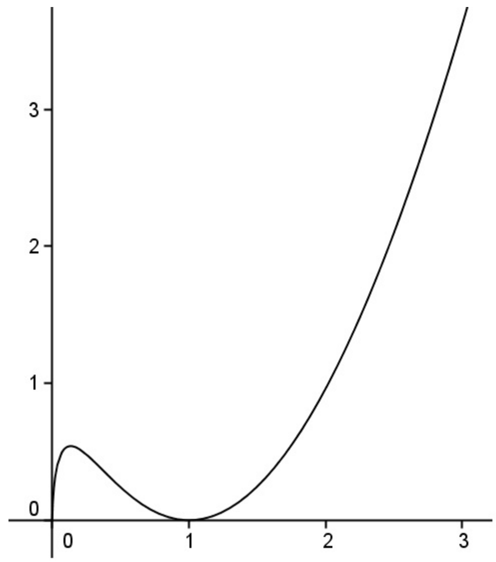
b) On fait le calcul du taux en 0 : $\tau_{f_1,0}(h) = \dfrac{h(\ln h)^2 - 0}{h} = (\ln h)^2$. Donc $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} \tau_{f_1,0}(h) = -\infty$ et f_1 n'est pas dérivable en 0 à droite.

c) On commence par calculer la dérivée de f_1 sur $]0, +\infty[$:

$$f_1'(x) = (\ln x)^2 + x \times \frac{2\ln x}{x} = \ln x(\ln x + 2).$$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) La tangente en 0 à droite est donc verticale.



2012-01.jpg

Exercice 3.

1) La fonction u est bien définie et surtout continue sur $]0,+\infty[$. Donc l'intégrale est définie car $[x,3x]\subset]0,+\infty[$.

2) Puisque la fonction est continue, elle admet une primitive (ne serait-ce que de la forme $U(x)=\displaystyle\int_a^x u(t)dt$ où a est une constante quelconque).

On a alors $f(x)=U(3x)-U(x)$.

3) Comme U est dérivable par définition d'une primitive, on a bien f dérivable et $f'(x)=3U'(3x)-U'(x)=3u(3x)-u(x)=\dfrac{e^{-3x}-e^{-x}}{x}$.

4) On utilise une primitive de $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ qui est le logarithme : $g(x)=\ln(3x)-\ln(x)=\ln 3$.

5) On cherche $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} f(x)$. On procède par encadrement : si $x\leq t\leq 3x$, alors $\dfrac{e^{-x}}{t}\geq\dfrac{e^{-t}}{t}\geq\dfrac{e^{-3x}}{t}$. Et en passant à l'intégrale (car les fonctions sont continues sur $[x,3x]$ et que $x<3x$, on trouve

$$e^{-x}\underbrace{\int_x^{3x}\frac{dt}{t}}_{\ln(3)}\leq f(x)\leq e^{-3x}\underbrace{\int_x^{3x}\frac{dt}{t}}_{\ln(3)}.$$

Par encadrement, on trouve alors $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} f(x)=\ln(3)$. Donc la fonction est prolongeable par continuité en 0 à droite.

Pour la dérivabilité en 0 à droite, on commence par le taux : $\tau_{f,0}(h)=\dfrac{\displaystyle\int_h^{-3h}\frac{e^{-t}}{t}dt-\ln 3}{h}$. Avec le même encadrement que précédemment légèrement amélioré, on trouve $\dfrac{e^{-3h}}{h}\leq\dfrac{e^{-t}}{t}$ pour $t\in[h,3h]$. Donc

$$\frac{e^{-3h}}{h}\int_h^{3h}dt\leq f(h)\quad\Leftrightarrow\quad 2e^{-3h}\leq f(h).$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{h}(2e^{-3h} - \ln 3) \leq \tau_{f,0}(h).$$

Et avec le théorème de comparaison, cela donne $\lim\limits_{\substack{h>0 \\ h\to 0}} \tau_{f,0}(h) = +\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0 à droite.

6) Si $t \in [x, 3x]$, alors $\dfrac{e^{-t}}{t} \leq \dfrac{e^{-x}}{t}$ et en passant à l'intégrale comme précédemment, on trouve bien $f(x) \leq e^{-x} \ln 3$. de plus, par positivité de la fonction, on peut ajouter que $0 \leq f(x)$.

On recherche les branches infinies en calculant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}\ln 3}{x} = 0$, on a par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptotique parallèle à l'axe des abscisses.

7) On étudie le signe de la dérivée $f'(x) = \dfrac{e^{-3x} - e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x}(e^{-x} - 1)(e^{-x} + 1)}{x}$ qui est du signe de $e^{-x} - 1$, à savoir négatif. D'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$
f	$\ln 3$ $\searrow$	

Exercice 4.

1) Un classique du cours de dénombrement : $p(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \boxed{\dfrac{1}{n}}$.

2) Idem : $p(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \boxed{\dfrac{1}{n(n-1)}}$.

3) On a $X = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i$. L'espérance étant linéaire, cela donne $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(B_i) = n \times \dfrac{1}{n} = \boxed{1}$.

4) On utilise la formule : $\mathrm{Cov}(B_i, B_j) = E(B_iB_j) - E(B_i)E(B_j) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

D'où la variance :

$$V(B_i, B_j) = V(B_i) + V(B_j) + 2\,\mathrm{Cov}(B_i, B_j) = \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} + 2\frac{1}{n^2(n-1)} = \boxed{2\frac{(n-1)^2+1}{n^2(n-1)}}.$$

5) On a $(X \neq 0) = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} B_i \neq 0\right) = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$ (au moins un des A_i est réalisé).

6) On a k rencontres, les autres étant distribués au hasard, donc $p(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$.

7) On calcule avec le crible :

$$\begin{aligned}
p(X \neq 0) = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} p(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} p \\
&= n \times \frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3} \frac{(n-3)!}{n!} + \cdots + (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}}.
\end{aligned}$$

Donc $p(X = 0) = 1 - p(X \neq 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

8) En utilisant les DL,on a $\lim_{n \to +\infty} p(X = 0) = \boxed{e^{-1}}$.

Exercice 5.

1) $p(X = 1) = p(X = 2) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{36}$, $p(X = 3) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{36}$ et $p(X = 4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

2) En posant U le numéro de l'urne, on cherche donc $p_{(X=1)}(U = 1) = \frac{p((X = 1) \cap (U = 1))}{p(X = 1)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{13}{36}} = \frac{6}{13}$.

3) En reprenant la notation précédente, on a, d'après la formule des probabilités totales (car les évènements $(U = i)_{1 \leq i \leq 4}$ forment une partition de l'univers) :

$$p(Y = 1) = \sum_{i=1}^{4} p_{(X=1)}(U = i) \times p_{(U=i)}(Y = 1).$$

Par le même calcul que précédemment, $p_{(X=1)}(U = 2) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{13}{36}} = \frac{4}{13}$ et $p_{(X=1)}(U = 3) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{13}{36}} = \frac{3}{13}$. Donc

$$\begin{aligned}
p(Y = 1) = p(Y = 2) &= \frac{6}{13} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{61}{156}, \\
p(Y = 3) &= \frac{4}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{25}{52}, \\
p(Y = 4) &= \frac{3}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{52}.
\end{aligned}$$

4) L'expérience aléatoire est la reproduction de n schémas de Bernoulli indépendants avec la même probabilité de succès (qui dépend de l'urne choisie).

La loi de probabilité Z est donc une loi binomiale de paramètres n et p (avec $p = \frac{1}{i+1}$ si $U = i$). Son espérance est donc $E(Z) = np = \frac{n}{i+1}$.

Exercice 6.

1) On note Y_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ le nombre de poisson pêchés entre le $i - 1$ ième et le i ième. On a alors $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Par exemple, Y_1 est le nombre de poisson pêchés jusqu'au premier marqué. Elle suit donc une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p = \frac{m}{N}$, la proportion de poissons marqués car les poissons sont remis en eau à chaque fois. De fait, les pêches étant indépendantes et les variables Y_i le sont aussi.

Ainsi, $E(Y_i) = \frac{1}{p}$ et par la linéarité de l'espérance, $E(X_n) = \frac{n}{p} = \boxed{\dfrac{nN}{m}}$. De même, les variables étant indépendantes, les covariances sont nulles deux à deux et $V(X_n) = \frac{nq}{p^2} = \boxed{\dfrac{nN(N-m)}{m^2}}$.

2) Comme la proportion de poissons marqués dans l'étang est $\frac{m}{N}$ et que celle obtenue est $\frac{n}{X_n}$, on trouve comme estimateur $A_n = \frac{m}{n}X_n$.

Le biais est donné par $E(A_n) - N = \frac{m}{n}E(X_n) - N = \frac{m}{n} \times \frac{nN}{m} - N = 0$. Donc l'estimateur choisi est sans biais.

D'autre part, il est bien convergent car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{X_n} = \frac{m}{N}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = N$.

3) On a affaire à une loi binomiale (tirages indépendants et identiques) de paramètres n et $p = \frac{m}{N}$. Ainsi, $E(Z_n) = np = \boxed{\dfrac{nm}{N}}$ et $V(Z_n) = npq = \boxed{\dfrac{nm(N-m)}{N^2}}$.

4) On prend $B_n = \dfrac{Z_n}{nm}$ dont l'espérance est bien $\dfrac{1}{N}$.

5) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^x (1-p+pt)^n dt &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^x \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k t^k dt\right)\\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x\\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k x^{k+1} = f(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $f(1) = \displaystyle\int_0^1 (1-p+pt)^n dt = \left[\frac{1}{p(n+1)}(1-p+pt)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p(n+1)} - \frac{(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

6) On calcule l'espérance :

$$\begin{aligned}E(C_n) &= \sum_{k=0}^n \frac{m(n+1)}{k+1}p(Z_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{m(n+1)}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= m(n+1)\underbrace{\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{f(1)}\\ &= \frac{m\cancel{(n+1)}}{p\cancel{(n+1)} - \dfrac{(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}} = \frac{m}{n}(1-(1-p)^{n+1})\end{aligned}$$

qui tend bien vers $\dfrac{m}{n} = N$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7.

1) Par récurrence : On pose (H_n) : "$I_n = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$".

<u>Initialisation :</u> Si $n = 0$, on a $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$.

<u>Hérédité :</u> On suppose que (H_n) est vraie pour n fixé. On cherche alors à calculer I_{n+1} par parties en prenant $u(t) = t^{n+1} \;\Rightarrow\; u'(t) = \frac{1}{n+1}t^n$ et $v'(t) = e^{-\lambda t} \;\Leftarrow\; v(t) = \frac{1}{-\lambda}e^{-\lambda t}$ qui sont continues.

$$\int_0^A t^n e^{-\lambda t}dt = \left[\frac{t^{n+1}e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-1}{(n+1)\lambda} t^n e^{-\lambda t} dt = \frac{A^{n+1}e^{-\lambda A}}{-\lambda} + \frac{1}{(n+1)\lambda}\int_0^A t^n e^{-\lambda t}dt.$$

En passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, on trouve

$$I_{n+1} = 0 + \frac{1}{(n+1)\lambda} I_n = \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}.$$

<u>Conclusion :</u> La proposition est donc vérifiée pour $n = 0$, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Il faut que f soit continue, positive et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A at^n e^{-\lambda t}dt = aI_n.$$

Donc $a = \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!}$.

On a alors $E(X_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt = aI_{n+1} = \frac{a(n+1)!}{\lambda^{n+2}} = \frac{n+1}{\lambda}$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt - \left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^2 = aI_{n+2} - \frac{(n+1)^2}{\lambda^2} = \frac{n+1}{\lambda^2}$ la convergence des intégrales étant assurée par l'existence des (I_n).

Pour $n = 0$, on retrouve les résultats de la loi exponentielle.

3) On a l'égalité $(T_n \leq t) = (X_t \geq n)$.

4) On calcule par l'évènement complémentaire : $p(X_t \geq n) = 1 - p(X_t < n) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p(X_t = k)$.

5) On a

$$F_{T_n}(t) = p(T_n \leq t) = p(X_t \geq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p(X_t = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

6) Il suffit de dériver la fonction de répartition :

$$f_{T_n}(t) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Exercice 8.

Aucune difficulté. Que du calcul. Intérêt ?

Exercice 9.

1) On démontre plus généralement par récurrence sur k que $u^k(a_i) = a_j$ où j est le reste de la division de $i + k$ par p et en posant $a_0 = a_p$.

2) On procède par l'absurde : Si les vecteurs étaient liés, on aurait $a_2 = \alpha a_1$ et $a_3 = u(a_2) = \alpha u(a_1) = \alpha a_2 = \alpha^2 a_1$. Au final,on obtient par récurrence finie $a_1 = u(a_p) = \alpha^{p-1}a_1$. Ainsi, $\alpha^{p-1} = 1$ et $\alpha = 1$ car E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

La première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Dans le cas $p = 2$, on trouve pour la seconde colonne : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans le cas $p = 3$, (idem pour $p = 4$), on part de $a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2$ et on résout le système à trois équations et deux inconnues donné par les hypothèses.

Exercice 10.

1) Il suffit de majorer $t^n \sin(\pi t)$ par t^n et de passer à l'intégrale (attention à l'ordre des bornes).
2) Par le théorème d'encadrement, (I_n) tend vers 0.
3) On part de I_{n+2} et on dérive le sinus (puis le cosinus).
4) D'après ce qui précède, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 I_n}{\pi} = 1$, donc

$$I_n \sim \frac{\pi}{n^2}.$$

Exercice 11.

1) Si la famille était liée, on aurait $u(x) = \alpha x$ et $\alpha^2 x + \alpha x + x = 0$. Donc $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, mais il n'y a pas d'autre solution que $\alpha = 0$ dans $\mathbb{R}$. Donc $u(x) = 0$, ce qui entraîne que $x = 0$. Contradiction.
2) Procédons par l'absurde en supposant que la famille est liée. Il existerait alors $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ telle que

$$\alpha x + \beta u(x) = \gamma y + \delta u(y).$$

3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4) Non, car dans ce cas, la famille $(x, u(x), y, u(y))$ serait liée.