Exercice 1.

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1) Montrer rapidement que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera alors $\varphi(P,Q) =< P, Q >$.

2) Existe-t-il un polynôme A de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ < P, A >= P(0)$?

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

1) Déterminer tous les endomorphismes de E diagonalisables qui n'ont qu'une valeur propre.

2) Déterminer tous les endomorphismes de E diagonalisables f vérifiant $f^2 = 0$.

3) Soit E un espace vectoriel non réduit au vecteur nul et f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre p $(p \geq 2)$, i.e. $\forall n \geq p,\ f^n = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

Montrer que f n'admet qu'une seule valeur propre que l'on précisera.

Exercice 3.

1) On considère l'équation $x_1 + x_2 = n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Combien a-t-elle de solutions $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$?

2) Même question avec $x_1 + x_2 + x_3 = n$.

3) Plus généralement, montrer que l'équation $x_1 + \cdots + x_p = n$, où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé, possède exactement $\binom{n+p-1}{p-1}$ solutions dans $\mathbb{N}^p$.

Exercice 4.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ sur $\mathbb{N}^*$. Soit $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable.

Exercice 5.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$, si une densité f de X est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{a}{\pi(a^2+t^2)}$

1) Vérifier que f est bien une densité.

2) Montrer qu'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy n'a pas d'espérance.

Exercice 6.

1) Montrer que $\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 7.

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 2$, $a_1 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$. Discuter selon $x \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Calculer sa somme quand elle converge. Même question pour la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{n!}$.

Exercice 8.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}dt$.

1) Donner le domaine de définition D de f.

2) Montrer que f est dérivable sur D et calculer sa dérivée.
3) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ différent de l'endomorphisme nul 0_E et tel que $f^2 = 0_E$.
1) Montrer que f est de rang 1.
2) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.
Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ p(X = j \cap Y = k) = \frac{K}{(j+k+1)!}.$$

1) Calculer la valeur de K. On pourra considérer la variable aléatoire $Z = X + Y$ et calculer $p(Z = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction Oral de l'ENSAI - Compléments 2013

Exercice 1.

1) Forme bilinéaire symétrique définie positive.

2) On pose $A(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec n son degré. On a alors $< A, X^l >= 0$ par définition pour tout $l \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k X^{k+l} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+l+1} X^{k+l+1} = 0$. Ce qui donne un système libre à autant d'équations que l'on veut et $n+1$ inconnues. Ainsi, $a_k = 0$ pour tout k et A est nul. Contradiction avec le fait que $< A, 1 >= 1$ par exemple. Il n'y a pas de solution.

Exercice 2.

1) Si l'endomorphisme f est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre, alors, dans une certaine base, sa matrice s'écrit λI_n. Si P est la matrice de changement de base, alors on a $\mathrm{Mat}(f) = P^{-1}(\lambda I_n)P = \lambda I_n$. Ainsi, les endomorphismes cherchés sont les homothéties.
2) On se place dans une base diagonalisant la matrice de f et on obtient une matrice avec les valeurs propres sur la diagonale. En élevant au carré, on doit trouver la matrice nulle, ce qui signifie que si λ est valeur propre, alors $\lambda^2 = 0$ et $\lambda = 0$. Les endomorphismes cherchés sont parmi ceux qui n'ont que des valeurs propres nulles. de plus, ils doivent satisfaire $\mathrm{rg}\, f = 1$ (raisonnement classique).
3) Il s'agit de 0 voir question précédente.

Exercice 3.

1) $n+1$.
2) $\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k+1) = n(n+1) - \dfrac{n(n+1)}{2+n+1} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$.
3) Γ_n^p.

Exercice 4.

Si $X_1 = X_2$, alors la matrice n'est pas diagonalisable. En revanche, elle l'est dans le cas contraire car le polynôme caractéristique aurait deux racines distinctes. Il suffit donc de calculer $p(X_1 \neq X_2)$. On a

$$\begin{aligned} p(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(X_1 = k) \times p(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (p(X_1 = k))^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^2 = p^2 q^{-2} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} = p^2 \cancel{q^{-2}} \cancel{q^2} \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

D'où la probabilité cherchée : $p(X_1 \neq X_2) = 1 - \dfrac{p}{2-p} = \dfrac{2(1-p)}{2-p}$.

Exercice 5.

1) Voir cours pour les détails : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi a^2(1+u^2)} a du = \frac{1}{\pi}[\mathrm{Arctan}\, u]_{-\pi}^{\pi} = 1$ avec le changement de variable $u = \frac{t}{a}$.
2) En effet, une primitive cherchée de $tf(t) = \dfrac{at}{\pi(a^2+t^2)}$ est $\frac{a}{2} \ln|a^2 + t^2|$ et l'intégrale diverge.

Exercice 6.

1) Ruse sempiternelle : on étudie la différence comme dans le cours de terminale pour $\ln(1+x) - x$ avec $x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1+x)$.
2) On passe au logarithme (tout est positif) et on obtient :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4} \le \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

De plus, via les sommes de Riemann, on trouve $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$ qui tend vers $\int_0^1 xdx$ en posant $x = \frac{k}{n}$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

En outre, $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = 0$.

Par encadrement, $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}}$.

Exercice 7.

On commence par déterminer la suite (a_n). On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1}\end{pmatrix}$. On a alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1\end{pmatrix} X_n$ et $X_n = A^n X_0$. On diagonalise A puis on calcule sa puissance. On trouve $\mathrm{Spec}(A) = \{-2;3\}$ et la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3\end{pmatrix}$. Son inverse est $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Ainsi, en posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3\end{pmatrix}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\times(-2)^n + 2\times 3^n & -(-2)^n + 3^n \\ -6\times(-2)^n + 6\times 3^n & 2\times(-2)^n + 3\times 3^n\end{pmatrix}.$$

Ce qui donne $a_n = \frac{1}{5}(9\times(-2)^n + 3^n)$.

On revient maintenant au problème de départ et on se pose la question de la convergence de la série. Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ par factorisation du facteur 3^n, la série ne peut pas converger ailleurs qu'en 0.

Pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{x^n}{n!}$, on a bien $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n!} = 0$ et la série est donc potentiellement convergente. On peut calculer le rayon de convergence

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9\times(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}{9\times(-2)^n + 3^n}\times\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3^{n+1}\left(9\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(9\left(\frac{-2}{3}\right)^{n}+1\right)}\times\frac{1}{n+1}$$

On a alors $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ et le rayon de convergence est infini, ce qui signifie que la série converge pour tout réel.

Exercice 8.

1) $D =]0;+\infty[$.

2) On note U une primitive de $u : t \longmapsto \frac{e^t}{t}$ qui existe car u est continue sur D. On a alors $f(x) = U(x^2) - U(x)$ et $f'(x) = 2xU'(x^2) - U'(x) = \frac{e^x}{x}(2x-1)$.

3) On utilise une comparaison : si $x \le t \le x^2$, alors $\frac{e^t}{x^2} \le \frac{e^t}{t}$. Les fonctions étant continues et $x \le x^2$ si x est grand (on cherche une limite en $+\infty$, on peut passer à l'intégrale :

$$\frac{1}{x^2}\int_x^{x^2} e^t dt \le f(x) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{e^x}{x}(e^x - 1) \le f(x).$$

D'après le Hall of Fame, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 9.

1) Par l'absurde, on suppose que $\operatorname{rg} f = 2$. Alors il existe u et v dans $\operatorname{Im} f$ qui sont libres. On pose x et y tels que $f(x) = u$ et $f(y) = v$. On a alors la famille $(x, y, f(x), f(y))$ qui est liée. Ainsi, il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ non tous nuls tels que $\alpha x + \beta y + \gamma f(x) + \delta f(y) = 0$. En appliquant f, on trouve $\alpha f(x) + \beta f(y) = 0$. Comme $f(x)$ et $f(y)$ sont liés, on a $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Et comme $f(x)$ et $f(y)$ ne sont pas nuls, on a $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, ce qui donne $\gamma f(x) + \delta f(y) = 0$ et le même raisonnement amène $(\gamma, \delta) = (0, 0)$. Contradiction avec le fait que la combinaison linéaire est non triviale.

2) On prend pour base $(f(x), y, x)$ comme précédemment.

Exercice 10.

1) $p(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} p((X = k) \cap (Y = n - k)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{K}{(\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1)!} = K\frac{n+1}{(n+1)!} = \boxed{\frac{K}{n!}}$.

D'autre part $1 = \sum_{n=0}^{+infty} p(Z = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K}{n!} = eK$. Donc $\boxed{K = \frac{1}{e}}$.

2) On a dans l'idée qu'elles ne vont pas être indépendantes. On regarde donc pour une valeur.

D'une part, $p((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{6e}$.

D'autre part, $p(X = 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p((X = 1) \cap (Y = k)) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2 + k)!} = \frac{2 - e}{e}$.

Et $p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{(2 - e)^2}{e^2} \neq p((X = 1) \cap (Y = 1))$. Les lois ne sont pas indépendantes.