Exercice 1.

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n, dont le coefficient du terme de plus haut degré est $a_n = (-2)^n$, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x).$$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P_n'(x)$.

2) Calculer explicitement $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$, et déterminer leurs racines.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

4) a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ s'annule en au moins n réels distincts.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet exactement n racines qui sont toutes réelles.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par la relation suivante : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{e^t - t}$.

1) Montrer que $f(x)$ a un sens pour tout réel x.

2) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Préciser la valeur de $f'(0)$.

3) Etudier les variations de la fonction f.

4) a) En étudiant les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^t - t - e^{\frac{t}{2}}$, montrer que pour tout $t \in [\ln 4, +\infty[$, on a $e^t - t \geq e^{\frac{t}{2}}$.

b) En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5) a) Montrer que si $x < 0$, alors pour tout $t \in [2x, x]$, on a $\dfrac{1}{e^x - t} \leq \dfrac{1}{e^t - t} \leq \dfrac{1}{e^{2x} - t}$.

b) En déduire que $f(x)$ tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $-\infty$.

6) Donner l'allure de la représentation graphique de f, le plan étant rapporté à un repère orthonormé.
On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $f(\ln 2) \simeq 0,4$.

Exercice 3.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Justifier que M est diagonalisable.

2) Montrer que -2 est valeur propre de f et déterminer la dimension du sous-espace propre E_{-2} associé.

3) Calculer $f(1, -1, -1, 1)$. En déduire une autre valeur propre ainsi que le sous-espace propre associé.

4) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice M' de f est diagonale. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{B}$. Calculer M'^2.

5) Calculer M^n pour tout entier naturel n.

6) On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies par u_0, v_0, w_0 et t_0, ainsi que

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ w_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ t_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n, w_n et t_n en fonction de u_0, v_0, w_0, t_0 et de n.
Que dire de leurs limites respectives ?

Exercice 4.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f^{n-1} \neq O_E \quad \text{et} \quad f^n = O_E.$$

1) a) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$.
b) Montrer que, pour un tel réel a, la famille $(f^{n-1}(a), f^{n-2}(a), \dots, f(a), a)$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
2) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note F_k le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $f^{n-1}(a)$, $f^{n-2}(a)$,. . .,$f^{n-k}(a)$.
a) Déterminer la dimension de F_k.
b) Montrer que $F_k = \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Im} f^{n-k}$.
c) Montrer que F_k est stable par f, autrement dit, que pour tout $x \in F_k$, on a $f(x) \in F_k$.
3) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k, stable par f et soit h la restriction de f à F.
a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $h^{p-1} \neq O_F$ et $h^p = O_F$.
b) Soit $b \in F$ tel que $h^{p-1}(b) \neq 0$, que peut-on dire de la famille de vecteurs $(b, h(b), \dots, h^{p-1}(b))$? En déduire que $h^k = O_F$.
c) Montrer que $F = F_k$.
d) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Exercice 5.

A l'entraînement, un basketteur met le ballon dans le panier avec une probabilité p.
1) Soit N le nombre minimal de lancers que le basketteur doit faire pour passer le ballon dans le panier. Par exemple, si le ballon est dans le panier au premier coup, $N = 1$. Donner la loi de N. Donner son espérance et sa variance.
2) Soit n un entier naturel.
Maintenant, le basketteur compte le nombre minimal de lancers nécessaires, X pour mettre n paniers. Donner pour tout entier $k > 0$, $p(X = k)$.
3) Expliquer pourquoi X peut être vu comme une somme de n variables indépendantes et identiquement distribuées dont on donnera la loi, l'espérance et la variance.
4) En déduire l'espérance et la variance de X.
5) Dans cette question, on prend $n = 2$. Retrouver la résultat de $E(X)$ par un calcul direct à partir de la loi de X trouvée à la question **2.**

Exercice 6.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme à densité $[a, a+1]$.
a) Donner la densité f et la fonction de répartition F de la loi de X.
b) Donner l'espérance et la variance de X.
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme à densité sur $[a, a+1]$.
2) Pour tout $n \in N^*$, on pose $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de Y_n.
b) Définir une variable aléatoire Z_n fonction affine de Y_n dont l'espérance soit égale à a.
c) Donner la variance de Z_n.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
On rappelle que la fonction queue Q de la loi X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = p(X > x) = 1 - F(x).$$

a) Déterminer la fonction queue Q de la loi des variables aléatoires X_n.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit R_n la fonction queue de la loi de M_n. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = (Q(x))^n.$$

c) En déduire la fonction de répartition G_n, puis la densité g_n de la loi de M_n.
d) Calculer l'espérance et la variance de M_n.
e) Définir une variable aléatoire N_n fonction affine de M_n dont l'espérance soit égale à a.
f) Donner la variance de N_n.

4) **a)** Comparer les variances de Z_n et N_n quand n tend vers $+\infty$.
b) La valeur de a vous est inconnue, et vous effectuez un grand nombre d'observations indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ du résultat de la même expérience donnant lieu à une variable aléatoire suivant la loi définie au **1.**

De quelle manière procédez-vous pour estimer a avec la meilleure précision possible ?

Correction Oral de l'ENSAI 2014

Exercice 1.

1) On pose donc (H_n) : "il existe un polynôme P_n de degré n, dont le coefficient du terme de plus haut degré est $a_n = (-2)^n$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$".

Initialisation : (H_0) est clairement vérifiée.

Hérédité : On suppose (H_n) vraie pour n fixé. On dérive $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ pour obtenir

$$f^{(n+1)}(x) = P_n(x)f'(x) + P_n'(x)f(x) = \underbrace{(-2xP_n(x) + P_n'(x))}_{P_{n+1}(x)}f(x)$$

On a clairement $\deg(P_{n+1} = \deg(-2x) + \deg(P_n) = n+1$ et de coefficient dominant $-2 \times (-2)^n$.

Conclusion : La propriété est vérifiée au rang 0, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $P_1(x) = -2x$ (racine 0), $P_2(x) = 4x^2 - 2$ (racines $\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$) et $P_3(x) = -8x^3 + 12x$ (racines $\frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et 0).

3) Compte tenu de la parité de e^{-x^2}, on peut se contenter de regarder la limite en $+\infty$. En utilisant le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k e^{-x^2} = 0$ (croissances comparées) pour $k \in \mathbb{N}$, on trouve en développant que $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

4) a) On pose donc (H_n) : "$f^{(n)}$ s'annule en au moins n réels distincts".

Initialisation : (H_1) est clairement vérifiée car $P_1(x) = -2x$ s'annule en 0.

Hérédité : On suppose (H_n) vraie pour n fixé. Donc $f^{(n)}$ s'annule n fois au moins en les valeurs $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. Ainsi, sur chaque intervalle $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ $(1 \leq k \leq n-1)$, on a f^n qui s'annule et on peut appliquer le théorème de Rolle pour trouver $n-1$ valeurs β_k telles que $f^{(n+1)}(\beta_k) = 0$.

De plus, on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{(n)}(x) = 0$, donc on applique le théorème de Rolle à l'infini sur l'intervalle $]-\infty, \alpha_1]$ pour trouver β_0 tel que $f^{(n+1)}(\beta_0) = 0$. Idem pour trouver $\beta_n \in [\alpha_n, +\infty[$. On a bien trouvé $n+1$ valeurs pour lesquelles la dérivée $f^{(n+1)}$ s'annule et (H_{n+1}) est vraie.

Conclusion : La propriété est vérifiée au rang 1, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On utilise le fait que si $f^{(n)}(x)$ s'annule, cela signifie que $P_n(x)$ s'annule et non $e^{-x^2} > 0$.

Exercice 2.

1) Comme $e^t \geq t+1$ pour tout t, on a $e^t - t > 0$, donc la fonction $u : t \longmapsto \dfrac{1}{e^t - t}$ est continue sur $[x, x^2]$, donc intégrable. Ainsi, $f(x)$ a un sens.

2) On pose U une primitive de u. On a alors $f(x) = U(2x) - U(x)$. Comme U est dérivable par définition, alors f aussi par composition avec une fonction linéaire et somme. Donc $f'(x) = 2U'(2x) - U'(x) = \dfrac{2}{e^{2x} - 2x} - \dfrac{1}{e^x - x}$.

3) Il nous faut le signe de $f'(x) = \dfrac{2(e^x - x) - (e^{2x} - 2x)}{(e^x - x)(e^{2x} - 2x)} = \dfrac{-e^x(e^x + 2)}{(e^x - x)(e^{2x} - 2x)}$ qui est positif. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

4) a) On commence par dériver g : $g'(t) = e^t - 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$. En posant $T = e^{\frac{t}{2}}$, cela donne $2g'(t) = 2T^2 - T - 2$. On trouve pour déterminant $\Delta = 17$. Les racines sont donc $T_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} < 2$ et $T_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$.

Donc si $t \geq \ln 4$, alors $T = e^{\frac{t}{2}} > T_1$. Ainsi, $g'(t)$ est positif sur l'intervalle $t \in [\ln 4, +\infty[$ et g est croissante. Il suffit maintenant de voir que $g(\ln 4) = 4 - \ln 4 - e^{\ln\sqrt{4}} = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$ pour conclure que $e^t - t \geq e^{\frac{t}{2}}$.

b) Par passage à l'inverse sur un intervalle où les fonctions considérées sont positives, on a $\dfrac{1}{e^t - t} \leq \dfrac{1}{e^{\frac{t}{2}}}$. On utilise ensuite la croissance de l'intégrale sur $[x, 2x]$ quand $x > 0$ (afin que $2x > x$) et on obtient :

$$f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{e^{\frac{-t}{2}}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq \left[\frac{-1}{2} e^{\frac{-t}{2}}\right]_x^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq \frac{-1}{2}\left(e^{-x} - e^{\frac{-x}{2}}\right)$$

Or on sait $f(x) \geq 0$ car la fonction u est positive, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est encadrée par 0 et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{2}\left(e^{-x} - e^{\frac{-x}{2}}\right) = 0$. D'où le résultat par encadrement.

5) a) On utilise dans un premier temps le fait que la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$ pour écrire que $e^{2x} \leq e^t \leq e^x$. Donc $e^{2x} - t \leq e^t - t \leq e^x - t$ et par passage à l'inverse, pour tout $t \in [2x, x]$, on a $\dfrac{1}{e^x - t} \leq \dfrac{1}{e^t - t} \leq \dfrac{1}{e^{2x} - t}$.

b) On intègre l'inégalité précédente en faisant attention aux bornes qui ne sont pas dans le bon sens cette fois :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{e^x - t} \geq \int_x^{2x} \frac{dt}{e^t - t} \geq \int_x^{2x} \frac{dt}{e^{2x} - t} \quad \Leftrightarrow \quad [-\ln|e^x - t|]_x^{2x} \geq f(x) \geq [-\ln|e^{2x} - t|]_x^{2x}.$$

On étudie la partie de gauche (idem à droite mutatis mutandis) : $[-\ln|e^x - t|]_x^{2x} = \ln|e^x - x| - \ln|e^x - 2x| = \ln|x| + \ln\left|\frac{e^x}{x} - 1\right| - \ln|2x| - \ln\left|\frac{e^{2x}}{2x} - 1\right|$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left|\frac{e^x}{x} - 1\right| = \ln 1 = 0$. Idem pour $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left|\frac{e^{2x}}{2x} - 1\right| = 0$ et comme $\ln|x| - \ln|2x| = \ln\left|\frac{x}{2x}\right| = -\ln 2$, on a bien par encadrement le résultat demandé.

Exercice 3.

1) La matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable.

2) Il suffit de considérer le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors $Mu = -2u$. Donc $-2 \in \mathrm{Spec}(M)$.

Pour chercher le sous-espace propre associé, on résout

$$(M + 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y - z + t &= 0 \\ -x + y + z - t &= 0 \\ -x + y + z - t &= 0 \\ x - y - z + t &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y + z - t.$$

Il s'agit donc d'un sous-espace de dimension 3 engendré par u, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) On trouve $f(1, -1, -1, 1) = (2, -2, -2, 2)$. Donc 2 est aussi valeur propre et le sous-espace associé ne peut être que de dimension 1 car la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de l'espace total qui est de 4 ici. Il est donc engendré par le vecteur $t = {}^t(1, -1, -1, 1)$.

4) On choisit une base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (u, v, w, t)$. On aura alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $M'^2 = 4I$.

5) On se base sur le calcul précédent pour affirmer $M'^{2p} = 2^{2p}I$ et $M'^{2p+1} = M'^{2p}M' = 2^{2p}M'$.

Ainsi, en revenant à la base canonique du début, on trouve $M^n = (PM'P^{-1})^n = PM'\cancel{P^{-1}P}M'\cancel{P^{-1}P}\dots M'P^{-1} = PM'^nP^{-1}$.

- Si $n = 2p$, alors $M^n = 2^nPIP^{-1} = 2^nI$.
- Si $n = 2p+1$, alors $M^n = 2^{2p}PM'P^{-1} = 2^{n-1}M$.

On peut aussi calculer

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mais c'est une perte de temps.

6) On pose $X_n = {}^t(u_n, v_n, w_n, t_n)$. On a alors $X_{n+1} = \frac{1}{4}MX_n$ et par récurrence immédiate : $X_n = \frac{1}{4^n}M^nX_0$. Donc

- Si $n = 2p$, alors $X_n = \frac{1}{2^n}X_0$. Donc $u_{2p} = \frac{u_0}{2^n}$ e idem pour v_{2p}, w_{2p} et t_{2p}.
- Si $n = 2p+1$, alors $X_n = \frac{2}{2^n}MX_0$. Donc $u_{2p+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(-u_0 - v_0 - w_0 + t_0)$, $v_{2p+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(-u_0 - v_0 + w_0 - t_0)$, $w_{2p+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(-u_0 + v_0 - w_0 - t_0)$ et $t_{2p+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - v_0 - w_0 - t_0)$.

Exercice 4.

1) a) Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, alors $f^{n-1}(a) = 0$ pour tout a et donc $f^{n-1} = O_E$.

b) Si la famille en question n'est pas une base, alors il existe une combinaison linéaire non triviale telle que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(a) = 0$. Soit k_0 l'entier le plus petit tel que $\alpha_{k_0} \neq 0$, alors en composant par f^{n-k_0-1}, on trouve

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{n-k_0-1+k}(a) = 0.$$

Tous les termes de la somme sont nuls excepté le premier (pour $k = k_0$) qui donne $\alpha_{k_0}f^{n-1}(a) = 0$. Et comme $f^{n-1}(a) \neq 0$, alors $\alpha_{k_0} = 0$. Contradiction avec le fait que $\alpha_{k_0} \neq 0$.

La matrice de f dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) On a déjà vu que les éléments de cette famille sont libres car il forment une sous-famille de la base précédente. Donc la dimension de F_k est le nombre d'éléments de $f^{n-1}(a)$, $f^{n-2}(a)$,...,$f^{n-k}(a)$, soit $\dim F_k = k$.

b) Il est clair que $F_k \subset \operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} f^{n-k} \subset F_k$. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f^k + \dim \operatorname{Im} f^k = n$. Or $\dim \operatorname{Ker} f^k \geq \dim F_k \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f^k \geq k$ et $\dim \operatorname{Im} f^k \leq \dim F_{n-k} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f^k \leq n-k$. Donc il y a égalité et on a bien $F_k = \operatorname{Ker} f^k$ et de même, $F_k = \operatorname{Im} f^{n-k}$.

c) Il suffit de calculer l'image de chacun des générateurs : $f \circ f^{n-1}(a) = 0$, $f \circ f^{n-2}(a) = f^{n-1}(a)$,...,$f \circ f^{n-k}(a) = f^{n-k+1}(a)$ qui sont tous dans F_k. Donc F_k est stable.

3) a) On prend un élément non nul de F qui s'écrit $b = \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$ en utilisant la base précédente. Si $p = 1$, on a $h^0(b) = b \neq 0$ et on a trouvé une valeur pour p.
b) En utilisant le même raisonnement que dans la question 1.2, on trouve que la famille est libre. Et de même, $h^k(b) = 0$, donc $h^k = O_F$.
c) On déduit de la question précédente que $f^k(F) = \{0\}$. Donc $F \subset \operatorname{Ker} f^k = F_k$. Mais comme ils ont la même dimension, il sont égaux.
d) Les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont donc les F_k pour $1 \leq k \leq n$.

Exercice 5.

1) Il s'agit de la répétition de schémas de Bernoulli indépendants et on s'arrête au premier succès, donc N suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$.
2) La loi est maintenant une loi de Pascal $\mathcal{P}(n,p)$ et $p(X = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-p)^k - np^n$.
3) On Utilise la preuve du cours en posant Z_i la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir i succès. On a alors $X = (Z_n - Z_{n-1}) + (Z_{n-1} - Z_{n-2}) + \cdots + (Z_2 - Z_1) + Z_1$. Or $Z_i - Z_{i-1}$ suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p.
4) Voir cours : $E(X) = \dfrac{n}{p}$ et $V(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
5) Dans ce cas, on a la probabilité que $X = k$ qui vaut $p(X = k) = \binom{k-1}{1} p^2 q^{k-2} = (k-1)p^2 q^{k-2}$ car il faut un succès avant le second qui est au rang k. Ainsi, $E(X) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} kp(X = k)$. On fait comme d'habitude.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kp(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p^2 q^{k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}.$$

Exercice 6.

1) a) La fonction à densité est $f(x) = 1$ si $x \in [a, a+1]$ et $f(x) = 0$ sinon.
La fonction de répartition est $F(x) = x - a$ si $x \in [a, a+1]$, $F(x) = 0$ si $x \leq a$ et $F(x) = 1$ si $x \geq 1$.
b) Avec le cours, on trouve $E(X) = \dfrac{a + a + 1}{2} = a + \dfrac{1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{((a+1) - a)^2}{12} = \dfrac{1}{12}$.
2) a) Par la linéarité de l'espérance, on a $E(Y_n) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = a + \dfrac{1}{2}$. Pour la variance, comme les variables sont indépendantes, la covariance deux à deux est nulle et $V(Y_n) = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{n}{12} = \dfrac{1}{12n}$.
b) Il suffit de prendre $Z_n = Y_n - \dfrac{1}{2}$.
c) On a donc $V(Z_n) = V(Y_n) = \dfrac{1}{12n}$.
3) a) On a $Q(x) = 1 - F(x) = 1 + a - x$ si $x \in [a, a+1]$, $Q(x) = 1$ si $x \leq a$ et $Q(x) = 0$ si $x \geq 0$.
b) On a $(M_n \geq k) = \bigcap_{p=1}^{n} (X_p \geq k)$. Donc $R_n(x) = p(M_n \geq k) = \prod_{p=1}^{n} p(X_p \geq k) = \prod_{p=1}^{n} Q(X_p) = (Q(x))^n$.
c) Ainsi, $G_n(x) = 1 - R_n(x) = 1 - (Q(x))^n$ et $g_n(x) = G_n'(x) = n(1 + a - x)^{n-1}$ si $x \in [a, a+1]$ et $g_n(x) = 0$ sinon.
d) On a par définition

$$E(M_n) = \int_a^{a+1} t g_n(t) dt = \int_a^{a+1} nt(1 + a - t)^{n-1} dt.$$

Avec le changement de variable $u = 1 + a - t$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= n\int_1^0 (1+a-u)u^{n-1}(-du) = n(1+a)\int_0^1 u^{n-1}du - n\int_0^1 u^n du \\ &= n(1+a)\left[\frac{u^n}{n}\right]_0^1 - n\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{(1+a) - \frac{n}{n+1}}. \end{aligned}$$

e) Il suffit de prendre $N_n = M_n - 1 + \dfrac{n}{n+1}$ et la linéarité fait le reste.

f) La variance de N_n est la même que celle de M_n par linéarité. On commence par calculer le moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} E(M_n^2) &= \int_a^{a+1} t^2 g_n(t)dt = \int_a^{a+1} nt^2(1+a-t)^{n-1}dt \\ &= -n\int_1^0 (1+a-u)^2u^{n-1}du = n\int_0^1 \left((1+a)^2u^{n-1} - 2(1+a)u^n + u^{n+1}\right)du \\ &= n\left[\frac{(1+a)^2u^n}{n} - 2\frac{(1+a)u^{n+1}}{n+1} + \frac{u^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = (1+a)^2 - 2\frac{n(1+a)}{n+1} + \frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V(N_n) = V(M_n) = E(M_n^2) - E(M_n)^2 &= (1+a)^2 - 2\frac{n(1+a)}{n+1} + \frac{n}{n+2} - \left((1+a) - \frac{n}{n+1}\right)^2 \\ &= \cancel{(1+a)^2} - 2\cancel{\frac{n(1+a)}{n+1}} + \frac{n}{n+2} - \cancel{(1+a)^2} + 2\cancel{\frac{n(1+a)}{n+1}} - \frac{n^2}{(1+n)^2} = \boxed{\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}}. \end{aligned}$$

4) a) Elles tendent toutes les deux vers 0.

b) Les deux variables aléatoires Z_n et N_n sont des estimateurs sans biais de a car leur espérance est bien a. Il reste à voir lequel est le meilleur. L'erreur quadratique moyenne est donnée par $E[(T-a)^2] = V(T) + (E(T) - a)^2$ si T est l'estimateur considéré. Or ici $E(T) - a = 0$, donc le meilleur estimateur est celui qui a la plus faible variance. A partir de $n \geq 8$, on trouve que $V(N_n) \leq V(Z_n)$. Donc il vaut mieux prendre N_n dans ce cas.