**Exercice 1.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(1+\cos(2\theta))z^2-(2\sin(2\theta))z+2=0$$

avec $0\leq\theta\leq 2\pi$.

**Exercice 2.**
Optimiser la fonction

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2$$

sous la contrainte $2x-y+z=3$.

**Exercice 3.**
Soit $(\Omega,\mathcal{A},p)$ un espace probabilisé. Montrer que, pour tous les éléments $A$ et $b$ de $\mathcal{A}$ :

$$p(A\cap B)-p(A)p(B)\leq\frac{1}{4}$$

(on pourra commencer en supposant que $p(A)\leq p(B)$.
Peut-on avoir l'égalité ?

**Exercice 4.**
Paul a dans sa poche deux boîtes d'allumettes indiscernables ; l'une contient cinq allumettes, l'autre deux. Il choisit au hasard une des boîtes, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide.

Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de cigarettes allumées avant de jeter une des deux boîtes.

**1)** Déterminer la loi de $X$.
**2)** Calculer l'espérance $E(X)$.

**Exercice 5.**
Un joueur dispose de trois dés. Le premier a quatre faces blanches et deux noires, le second a trois faces blanches et trois noires, le troisième a deux faces blanches et quatre noires. Il choisit un dé au hasard et il lance $2n$ fois : il obtient $n$ fois une face noire. Calculer la probabilité pour qu'il ait choisi le troisième dé, et déterminer la limite de cette probabilité lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 6.**
Soit $n$ un entier au moins égal à 2. Deux personnes lancent $n$ fois chacune une pièce parfaite.
**1)** Quelle est la probabilité pour qu'elles obtiennent à elles deux exactement $n$ fois pile ?
**2)** Quelle est la probabilité pour qu'elles obtiennent le même nombre de fois pile ?

**Exercice 7.**
Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$. On note $S=X_1+X_2$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Quelle est la loi conditionnelle de $X_1$ sachant $(S=n)$ ?

**Exercice 8.**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0\in]0;1[$ et la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n-u_n^3$.

**1)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in ]0;1[$.
**2)** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante, puis qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 9.**

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin t dt$. Etudier $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.

**Exercice 10.**

Soit $f$ un endomorphisme non nul d'un espace vectoriel $E$ de dimension 3 tel que $f^2 = 0_E$.
**1)** Démontrer que $f$ est de rang 1.
**2)** Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 11.**

Soit $P$ un polynôme de degré $n$ au moins égal à 2 admettant $n$ racines réelles distinctes.
**1)** Rappeler l'énoncer du théorème de Rolle.
**2)** Montrer que le polynôme dérivé $P'$ de $P$ admet $n-1$ racines réelles distinctes.
**3)** Montrer que pour tout réel non nul $\lambda$, le polynôme $P' + \lambda P$ admet $n$ racines réelles distinctes. On pourra considérer la fonction $f$ définie par $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$.

**Correction Oral de l'ENSAI - Compléments 2012**

**Exercice 1.**

On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = (2\sin(2\theta))^2 - 8(1+\cos(2\theta)) = 4(1-\cos^2(2\theta)) - 8(1+\cos(2\theta)) = -4(\cos(2\theta)+1)^2.$$

On obtient donc deux racines $z_{\pm} = \dfrac{\cancel{2}\sin(2\theta) \pm \cancel{2}i(\cos(2\theta)+1)}{\cancel{2}(1+\cos(2\theta))} = \dfrac{\sin(2\theta)}{1+\cos(2\theta)} \pm i$. D'où le module (qui est le même car les racines sont complexes conjuguées :

$$|z_+| = |z_-| = \frac{\sqrt{\sin^2(2\theta) + (\cos(2\theta)+1)^2}}{1+\cos(2\theta)} = \frac{\sqrt{1 - \cancel{\cos^2(2\theta)} + \cancel{\cos^2(2\theta)} + 2\cos(2\theta) + 1}}{1+\cos(2\theta)} = \sqrt{\frac{2}{1+\cos(2\theta)}}.$$

Comme ils sont conjugués complexes, il suffit de calculer l'argument de $z_+$, celui de $z_-$ étant alors son opposé.

En posant $\alpha = \arg(z_+)$, on a alors $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|$.

**Exercice 2.**

On peut utiliser les multiplicateurs de Lagrange, mais il est bien plus facile ici d'utiliser la contrainte pour simplifier l'étude de fonction par substitution. On est ramené à étudier $g(x,z) = f(x, 2x+z-3, z) = 5x^2 + 3z^2 + +4xz - 12x - 6z + 9$.

On calcule alors les dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 10x + 4z - 12 \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 4x + 6z - 6$$

La recherche des point critiques donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x + 2z - 6 = 0 \\ 2x + 3z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (x,z) = (\tfrac{12}{11}, \tfrac{3}{11}).$$

On calcule $g(\frac{12}{11}, \frac{3}{11}) = \frac{18}{11}$.
Une décomposition de Gauss de $g(x,z) - \frac{18}{11}$ donne :

$$g(x,z) = 3(z + \tfrac{2}{3}x - 1)^2 + \tfrac{11}{3}(x - \tfrac{12}{11})^2 > 0.$$

Ainsi, le minimum de $f$ sous la contrainte est atteint pour $(\frac{12}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{3}{11})$.

**Exercice 3.**

Il suffit de voir que $p(A \cap B) \leq p(A)$. Et en supposant $p(A) \leq p(B)$, on trouve

$$p(A \cap B) - p(A)p(B) \leq p(A) - p(A)^2.$$

Une rapide étude de la fonction $f : x \longmapsto x - x^2$ sur $[0;1]$ montre que son maximum vaut $\frac{1}{4}$ atteint en $\frac{1}{2}$. (De même par symétrie pour $p(B) \leq p(A)$). Ainsi, l'égalité est vérifiée en prenant par exemple $A = B$ et $p(A) = \frac{1}{2}$.

**Exercice 4.**

**1)** Un calcul élémentaire donne

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{5}{32}$ |

Par exemple, pour $p(X=5)$, on appelle $A$ l'évènement "tirer la boîte ayant cinq allumettes au début" et $B$ l'évènement "tirer la boîte ayant deux allumettes au début". On calcule le nombre de combinaisons qui vident la première boîte : il n'y en a qu'une : $AAAAA$ ; ainsi que le nombre de combinaisons qui vident la seconde boîte : Il est nécessaire et suffisant que la combinaison finisse par un $B$ et ne possède qu'un seul $B$ auparavant, soit $AAABB$, $AABAB$, $ABAAB$ ou $BAAAB$. Autrement dit, il y en a $\binom{4}{1}$. Chacun de ces évènement à la même probabilité de se produire, soit $\frac{1}{2^5}$. D'où la probabilité cherchée : $p(X=5)=\frac{1}{32}+\frac{4}{32}=\frac{5}{32}$.

**2)** On utilise le tableau précédent :

$$E(X)=\sum_{n=2}^{6} np(X=n)=\boxed{\frac{119}{32}}.$$

**Exercice 5.**

On note $D_i$ l'évènement : "il a choisi le dé numéro $i$" et $X$ la variable aléatoire égale au nombre de faces noires obtenues en $2n$ lancers.

On cherche donc $p_{(X=n)}(D_3)=\dfrac{p(D_3\cap(X=n))}{p(X=n)}$.

On calcule $p(X=n)$ par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(X=n) &= p(D_1)\times p_{D_1}(X=n)+p(D_2)\times p_{D_2}(X=n)+p(D_3)\times p_{D_3}(X=n) \\ &= \frac{1}{3}\times\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\times\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\times\frac{1}{3}\times\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \boxed{\frac{1}{3}\binom{2n}{n}\left(2\frac{2^n}{3^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}\right)}. \end{aligned}$$

D'où

$$p_{(X=n)}(D_3)=\frac{\frac{1}{3}\binom{2n}{n}\frac{2^n}{3^{2n}}}{\frac{1}{3}\binom{2n}{n}\left(2\frac{2^n}{3^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}\right)}=\frac{\frac{2^n}{3^{2n}}}{2\frac{2^n}{3^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}}=\boxed{\frac{2^{3n}}{2^{3n+1}+3^{2n}}}.$$

La limite est donc 0.

**Exercice 6.**

**1)** La situation est identique à un tirage de $2n$ pièces dans lequel se trouve $n$ fois pile. On a donc, en utilisant une loi binomiale, la probabilité cherchée : $p_1=\binom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}}$.

(Nombre que l'on retrouve en calculant $\sum_{k=0}^{n} p(X_1=k)p(X_2=n-k)=\dfrac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$).

**2)** Ici, la situation est analogue car il nous faut calculer encore :

$$p_2=\sum_{k=0}^{n} p(X_1=k)\times p(X_2=k)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}.$$

**Exercice 7.**

On cherche à calculer $p_{(S=n)}(X_1=k)$ avec $k\leq n$. On commence par calculer

$$\begin{aligned} p(S=n) &= \sum_{k=0}^{n} p(X_1=k)\times p(X_2=n-k)=e^{-\lambda-\mu}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} \\ &= \boxed{\frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!}(\lambda+\mu)^n}. \end{aligned}$$

Or $p((X_1 = k) \cap (S = n)) = p((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)) = e^{-\lambda-\mu} \dfrac{\lambda^k}{k!} \dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$. Donc la probabilité cherchée est :

$$p_{(S=n)}(X_1 = k) = \boxed{\frac{\lambda^k \mu^{n-k} \binom{n}{k}}{(\lambda+\mu)^n}}.$$

**Exercice 8.**

**1)** Par récurrence. Aucune difficulté.

**2)** Comme $u_{n+1} - u_n = -u_n^3 \leq 0$, alors elle est décroissante. De plus, elle est minorée par 0, donc elle converge. Pour trouver la limite, on passa à la limite dans la relation de récurrence : $l = l - l^3 \quad \Leftrightarrow l = 0$.

**Exercice 10.**

**2)** Comme $f$ est de rang 1, par le théorème du rang, son noyau est de dimension 2. On prend $(u, v)$ une base du noyau que l'on complète via le théorème de la base incomplète par un vecteur $w$ de telle sorte que $(u, v, w)$ soit une base de $E$. On a alors $f(w) \neq 0$, car sinon $w$ serait dans le noyau et $f^2(w) = 0$, ce qui impose que $f(w)$ est dans le noyau et il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(w) = \alpha u + \beta v$. Si $\alpha \neq 0$, on prend $(\alpha u + \beta v, v, w)$ comme base et on obtient bien la matrice voulue.

**Exercice 11.**

**1)** Voir cours.

**2)** On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les racines ordonnées de $P$. Le polynôme $P$ est alors une fonction continue s'annulant aux bornes des $n-1$ intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. On applique le théorème de Rolle sur chacun d'entre eux pour trouver $n-1$ racines distinctes pour $P'$.

**3)** Quand on dérive $f$, on trouve $f'(x) = (P'(x) + \lambda P(x))e^{\lambda x}$. De même, $f$ s'annule aux bornes des intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Et en appliquant là encore le théorème de Rolle, on trouve $n-1$ valeurs pour lesquelles $f'$ s'annule, autrement dit $P' + \lambda P$ car $e^{\lambda x} > 0$. Il manque une valeur que l'on obtient en appliquant le théorème de Rolle généralisé à l'intervalle $]-\infty; x_1]$ si $\lambda > 0$ (car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$) ou à l'intervalle $]x_n; +\infty[$ si $\lambda < 0$.