Programme de Khôlle $n°$1 (semaine 38)

Logique - Théorie des ensembles - Relations binaires - Dénombrement

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

THEORIE DES ENSEMBLES : Révision de première année : Différence symétrique. Parties d'un ensemble. Produit cartésien. Recouvrements et partitions. Démonstration d'une égalité d'ensemble, de l'intersection vide de deux ensembles. + Image réciproque.

RELATIONS BINAIRES : Réfléxivité, symétrie, antisymétrie, transitivité. Relations d'équivalence. Classes d'équivalence. Relations d'ordre.

Questions de Cours :

- Différence symétrique,
- Nombre de parties d'un ensemble de cardinal n,
- Def d'une relation réflexive,
- Def d'une relation symétrique,
- Def d'une relation antisymétrique,
- Def d'une relation transitive,
- Déf d'une classe d'équivalence,
- Définition du raisonnement par l'absurde,
- Def image réciproque d'un ensemble,

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

1) Par quelle méthode montreriez-vous que : Si n^2 est impair, alors n est impair ?

2) Quelles sont les propositions vraies ? Si une proposition est fausse, écrire sa négation.

a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$.

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2>x$.

Exercice 2.

1) Montrer que $A\Delta B = (A\cap \bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$.

2) Montrer que $(A\cap B = A\cup B) \Rightarrow A = B$.

Exercice 3.

Sur $\mathbb{Z}$, on pose

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x-y \text{ est multiple de 2 et de 3}$$

et

$$x\mathcal{R}'y \text{ si et seulement si } x-y \text{ est multiple de 2 ou de 3.}$$

1) Déterminer si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont des relations d'équivalence.

2) Déterminer les classes d'équivalence éventuelles.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) Par la contraposée.

2) **a)** Faux. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.

b) Vrai.

c) Faux. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.

d) Vrai.

Exercice 2.

Vu en cours.

Exercice 3.

1) La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, mais pas $\mathcal{R}'$ car elle n'est pas transitive ($3\mathcal{R}'5$ et $5\mathcal{R}'8$, mais 3 et 8 ne sont pas en relation.

2) Pour $\mathcal{R}$ donc, il y a six classes d'équivalence : celles de 0, 1, 2, 3, 4 et 5 selon le reste de la division euclidienne par 6.