

Logique - Théorie des ensembles - Relations binaires - Dénombrement

EN2D2

Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

THEORIE DES ENSEMBLES : Révision de première année : Différence symétrique. Parties d'un ensemble. Produit cartésien. Recouvrements et partitions. Démonstration d'une égalité d'ensemble, de l'intersection vide de deux ensembles. + Image réciproque.

RELATIONS BINAIRES : Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité. Relations d'équivalence. Classes d'équivalence. Relations d'ordre.

DENOMBREMENT : Révision de première année.

Questions de Cours :

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Différence symétrique,• Nombre de parties d'un ensemble de cardinal n,• Def d'une relation réflexive,• Def d'une relation symétrique, | <ul style="list-style-type: none">• Def d'une relation antisymétrique,• Def d'une relation transitive,• Déf d'une classe d'équivalence,• Définition du raisonnement par l'absurde,• Def image réciproque d'un ensemble, |
|---|---|

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

- 1) Par quelle méthode montreriez-vous que : Si n^2 est impair, alors n est impair ?
- 2) Quelles sont les propositions vraies ? Si une proposition est fausse, écrire sa négation.
 - a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
 - b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
 - c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
 - d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

Exercice 2.

- 1) Montrer que $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
- 2) Montrer que $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$.

Exercice 3.

Sur $\mathbb{Z}$, on pose

$x \mathcal{R} y$ si et seulement si $x - y$ est multiple de 2 et de 3

et

$x \mathcal{R}' y$ si et seulement si $x - y$ est multiple de 2 ou de 3.

- 1) Déterminer si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont des relations d'équivalence.
- 2) Déterminer les classes d'équivalence éventuelles.



Solutions des exercices

Exercice 1.

- 1) Par la contraposée.
- 2) a) Faux. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
b) Vrai.
c) Faux. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
d) Vrai.

Exercice 2.

Vu en cours.

Exercice 3.

- 1) La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, mais pas $\mathcal{R}'$ car elle n'est pas transitive ($3\mathcal{R}'5$ et $5\mathcal{R}'8$, mais 3 et 8 ne sont pas en relation).
- 2) Pour $\mathcal{R}$ donc, il y a six classes d'équivalence : celles de 0, 1, 2, 3, 4 et 5 selon le reste de la division euclidienne par 6.

