

Variables aléatoires discrètes - Séries

EN2D2

Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

VARIABLES ALÉATOIRES FINIES : Loi uniforme (discrète), loi de Bernoulli, loi binomiale, loi hypergéométrique.

SÉRIES : Définition. Condition nécessaire de convergence. Critères de convergence (comparaison, Cauchy, d'Alembert, Riemann, des séries alternées). Calculs de sommes.

Exercices préparatoires :

Exercice 1. Étude de convergence

Étudier la convergence des séries de terme général :

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e.$ | 9) $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1.$ | 15) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$ |
| 2) $2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1).$ | 10) $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$ | 16) $\frac{n^2}{2^n + n}.$ |
| 3) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}.$ | 11) $\frac{1}{\sum_{k=1}^n k}.$ | 17) $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}.$ |
| 4) $\frac{a^n}{1 + a^{2n}}.$ | 12) $e^{\frac{1}{n^2}}.$ | 18) $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$ |
| 5) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n}}.$ | 13) $\frac{1}{(\ln n)^n}.$ | 19) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n.$ |
| 6) $\frac{(-1)^n}{\ln n}.$ | 14) $\ln\left(1 + \left(\frac{-1}{n}\right)^n\right).$ | 20) $\frac{n^n (\ln n)^n}{n!}.$ |
| 7) $\frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}.$ | | |
| 8) $\frac{2.4.6 \dots (2n)}{n^n}.$ | | |

Exercice 2. ♪ Preuve de la divergence de la série harmonique par Pietro Mengoli (1626-1686)

- 1) Montrer que $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}.$
- 2) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 3.

On suppose que dans un livre de 500 pages, il y a 300 fautes d'impression distribuées au hasard. Calculer la probabilité pour que la page 36 contienne :

- 1) Exactement deux fautes d'impression.
- 2) Au moins deux fautes d'impression.



Solutions des exercices

Exercice 1.

- 1) $\sim -\frac{e}{2n} \Rightarrow$ DV.
- 2) $\sim -\frac{3}{n^2} \Rightarrow$ CV.
- 3) $\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV.
- 4) cv ssi $|a| \neq 1$.
- 5) Série alternée $\Rightarrow$ CV.
- 6) Série alternée $\Rightarrow$ CV.
- 7) Harmonique + alternée $\Rightarrow$ DV.
- 8) d'Alembert $\Rightarrow$ CV.
- 9) $= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + (n^{-3/2}) \Rightarrow$ DV.
- 10) $= \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$ pour n assez grand. Donc elle est CV.
- 11) Converge par équivalent, puis télescopage.
- 12) DV grossièrement car $e^{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$.
- 13) CV D'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$.
- 14) $\sim \frac{(-1)^n}{n^n}$ qui CV par le CSA.
- 15) diverge.
- 16) converge.
- 17) DV $\sim \frac{1}{n}$.
- 18) Cauchy.
- 19) Cauchy.
- 20) d'Alembert.

Exercice 2.

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \dots > 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Exercice 3.

- 1) Pour chaque faute, on a une probabilité de $\frac{1}{500}$ qu'elle soit sur la page 36. Le nombre de fautes N sur la page 36 suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 300$ et de probabilité $p = \frac{1}{500} = 0,05$.
Donc

$$p(N = 2) = \binom{500}{2} 0,05^2 0,95^{298} \simeq 0.$$

- 2) On utilise le passage au complémentaire :

$$p(N \geq 2) = 1 - p(N = 0) - p(N = 1) \simeq 1.$$

