Programme de Khôlle $n°8$ (semaine 46)

Variables aléatoires discrètes - Séries

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

VARIABLES ALÉATOIRES FINIES : Loi uniforme (discrète), loi de Bernoulli, loi binomiale, loi hypergéométrique.

SÉRIES : Définition. Condition nécessaire de convergence. Critères de convergence (comparaison, Cauchy, d'Alembert, Riemann, des séries alternées). Calculs de sommes.

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES INFINIES : Lois géométriques sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, loi de Poisson, loi de Pascal.

INTÉGRALES IMPROPRES : Définition. Rappel des théorèmes et techniques de calcul sur les intégrales définies. Intégrale de Riemann. Théorème de comparaison.

Questions de Cours :

- Formule de Bayes,
- Formule des probabilités composées,
- Formule des probabilités totales,
- Def espérance,
- Def variance,
- Formule de König-Huygens,
- Loi de Bernoulli,
- Loi binomiale,
- Loi uniforme,
- Loi hypergéométrique,
- Critère de dv grossière,
- Critère de d'Alembert,
- Critère de Cauchy,
- Critère de Riemann,
- Lois géométriques sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$,
- Loi de Poisson,
- Loi de Pascal.

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres. La probabilité qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à $0,1$.

On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :

- N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés.
- X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés.
- Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc $N = X + Y$.

1) Déterminer pour tout entier n et k la probabilité conditionnelle $p_{(N=n)}(X = k)$.

2) Déterminer pour tout entier k la probabilité $p(X = k)$. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $0,5$.

3) On admet que la loi de Y est une loi de Poisson de paramètre $4,5$. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

a) Déterminer la probabilité $p\left((X = i) \cap (Y = j)\right)$.

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

On suppose que dans un livre de 500 pages, il y a 300 fautes d'impression distribuées au hasard. Calculer la probabilité pour que la page 36 contienne :

1) Exactement deux fautes d'impression.

2) Au moins deux fautes d'impression.

Exercice 3.

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)(\ln\ln t)}\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\Big(\frac{1+t^2}{1+t^3}\Big)\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(2 + (t+3)\ln\big(\frac{t+2}{t+4}\big)\Big)\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}$

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) On a la loi conditionnelle cherchée qui suit une loi binomiale de paramètre n et de probabilité $p = 0,1$. En effet, pour chacun des n colis, la probabilité qu'il arrive détérioré est de $0,1$ et le schéma de Bernoulli est répété de manière indépendante et identique. Ainsi, $p_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} 0,1^k 0,9^{n-k}$.

2) Si $n < k$, alors $p_{(N=n)}(X = k) = 0$. Donc en utilisant le système complet d'évènements $\{N = n\}_n$, on trouve

$$\begin{aligned}
p(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} p((N = n) \cap (X = k)) = \sum_{n=k}^{+\infty} p_{(N=n)}(X = k) \times p(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-5}5^n}{n!} \times \binom{n}{k} 0,1^k 0,9^{n-k} = e^{-5} 0,1^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\cancel{n!}5^n}{\cancel{n!}k!(n-k)!} 0,9^{n-k} \\
&= \frac{e^{-5}0,1^k 5^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{5^{n-k}0,9^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-5}0,5^k}{k!} \underbrace{\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{4,5^K}{K!}}_{e^{4,5}} \\
&= \boxed{\frac{e^{-0,5}0,5^k}{k!}}.
\end{aligned}$$

Donc X suit bien une loi de Poisson de paramètre $0,5$.

3) a) On a, comme précédemment :

$$\begin{aligned}
p\left((X = i) \cap (Y = j)\right) &= p\left((X = i) \cap (N = i + j)\right) = p(N = i + j) \times p_{(N=i+j)}(X = i) \\
&= \frac{e^{-5}5^{i+j}}{(i+j)!} \binom{i+j}{i} 0,1^i 0,9^j = \frac{e^{-5}5^{i+j} \times 0,1^i 0,9^j}{i!j!} = \boxed{\frac{e^{-5} \times 0,5^i 4,5^j}{i!j!}}.
\end{aligned}$$

b) En suivant le même raisonnement que précédemment, on trouve que Y suit une loi de Poisson de paramètre $4,5$. Ainsi,

$$p(X = i) \times p(Y = j) = \frac{e^{-0,5}0,5^i}{i!} \times \frac{e^{-4,5}4,5^j}{j!}.$$

Donc oui, les variables sont indépendantes.

Exercice 2.

1) Pour chaque faute, on a une probabilité de $\frac{1}{500}$ qu'elle soit sur la page 36. Le nombre de fautes N sur la page 36 suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 300$ et de probabilité $p = \frac{1}{500} = 0,05$. Donc

$$p(N = 2) = \binom{500}{2} 0,05^2 0,95^2 98 \simeq 0.$$

2) On utilise le passage au complémentaire :

$$p(N \geq 2) = 1 - p(N = 0) - p(N = 1) \simeq 1.$$

Exercice 3.

1) divergente
2) convergente si et seulement si $\alpha > -1$
3) divergente
4) divergente
5) divergente
6) convergente
7) divergente