Programme de Khôlle $n°$10 (semaine 49)

Intégrales impropres - Variables aléatoires continues

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

INTÉGRALES IMPROPRES : Définition. Rappel des théorèmes et techniques de calcul sur les intégrales définies. Intégrale de Riemann. Théorème de comparaison.

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES : Définition d'une densité et d'une fonction de répartition. Calcul de l'espérance et de la variance. Lois classiques : uniforme, exponentielle, normale.

Questions de Cours :

- Définition de fonction à densité,
- Définition de fonction de répartition,
- Def espérance,
- Def variance,
- Def écart type,
- Inégalité de Markov,
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
- Loi faible des grands nombres,
- Loi uniforme,
- Loi exponentielle,
- Loi normale,

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)(\ln\ln t)}\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\Big(\frac{1+t^2}{1+t^3}\Big)\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(2+(t+3)\ln\big(\frac{t+2}{t+4}\big)\Big)\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}$

Exercice 2. ♪

Soit $f : t \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

1) Quel est son domaine de définition ?

2) Montrer que $tf(t) = (t-1)f(t-2)$.

Exercice 3. ♩

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$.

1) Etudier la convergence de I_n.

2) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.

3) Calculer I_1. En déduire I_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) divergente
2) convergente si et seulement si $\alpha > -1$
3) divergente
4) divergente
5) divergente
6) convergente
7) divergente

Exercice 2.

1) $\mathscr{D}_f =]-1, +\infty[$ car la fonction à intégrer est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui est intégrable au voisinage de 1. Au voisinage de 0, on doit avoir $t > -1$ car $\dfrac{x^t}{\sqrt{1-x^2}} \sim x^t$.

2) $f(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{t-2}(x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{t-2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^{t-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + f(t-2)$.

Par IPP, on trouve $\displaystyle\int_0^1 x^{t-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{t-1}f(t)$, d'où le résultat.

Exercice 3.

1) Par de problème en 0. En $+\infty$, l'intégrande est équivalente à $\frac{1}{t^{4n}}$ qui converge si $n \geq 1$.

2) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^4}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^4}{(1+t^4)^n}\mathrm{d}t - \left[\frac{-t}{4(n-1)(1+t^4)^{n-1}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{4(n-1)}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^{n-1}}$ par IPP. Donc $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{4(n-1)}I_{n-1}$, ce qui donne $I_n = \dfrac{4n-5}{4(n-1)}I_{n-1}$.

3) Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ donne $I_1 = -\displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{\mathrm{d}u}{u^2(1+\frac{1}{u^4})} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{d}u}{1+u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4}\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4}\mathrm{d}u - I_1$.

D'où $2I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{2+v^2}$ avec le changement $v = u - \frac{1}{u}$. Donc $2I_1 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\dfrac{v}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $\boxed{I_1 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}}$.

Par récurrence immédiate, $I_n = \dfrac{(4n-5)(4n-9)\dots 3}{4(n-1)4(n-2)\dots 4}\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\displaystyle\prod_{p=1}^{n-1}\frac{4p-1}{4p}$.

Pour la limite, on étudie la limite du produit : $\ln\prod = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \ln\frac{4p-1}{4p}$. Mais $\ln(1-\frac{1}{4p}) \sim \frac{-1}{4p}$ et la série diverge grossièrement vers $-\infty$. Donc $\prod \longrightarrow 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.