**Programme de Khôlle $n°$11 (semaine 50)**

**Variables aléatoires continues**

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES : Définition d'une densité et d'une fonction de répartition. Calcul de l'espérance et de la variance. Lois classiques : uniforme, exponentielle, normale.

**Exercices préparatoires :**

**Exercice 1.**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \qquad g(x) = x\ln^2(x).$$

**1)** Montrer que $g$ réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.

Dans la suite, on pose $h$ la bijection réciproque de la restriction de $g$ à l'intervalle $]1,+\infty[$.

**2) a)** Montrer que $\forall x > 0 \qquad \ln h(x) + 2\ln(\ln h(x)) = \ln x$.

**b)** En déduire un équivalent simple de $h(x)$ lorsque $x$ tend vers l'infini.

**3)** Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2g(x)} & \text{si } |x| < \frac{1}{e} \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**a)** Montrer qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.

**b)** Possède-t-elle une espérance et si oui, la calculer.

**Exercice 2.** ♩

Alice et Bob jouent avec leur calculatrice. Chacun obtient un nombre aléatoire entre de l'intervalle $[0;1]$. On imagine que les résultats sont des réels et pas nécessairement des décimaux contrairement à la réalité. Si le produit des deux nombres obtenus est inférieur ou égal à $k = \frac{1}{2}$, alors Bob gagne.

**1)** Quelle est la probabilité qu'Alice gagne ?

**2)** Existe-t-il une valeur de $k$ pour que le jeu soit équitable ?

**Exercice 3.** ♩

Un hurdler s'élance pour un 110m haies. S'il ne renverse aucune haie, il effectue son parcours en $X$ secondes avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(13,2;0,2)$. Il peut renverser chacune des dix haies avec la probabilité $\frac{1}{10}$, ce qui lui coûte $0,2$ seconde à chaque fois.

Quelle est la probabilité qu'il batte le record du monde ($12s80$ détenu par l'américain Aries Merritt, le 7/9/2012) ?

**Solutions des exercices**

**Exercice 2.**

**1)** $p = \displaystyle\int_k^1 \left(1 - \frac{k}{x}\right) \mathrm{d}x = 1 - k + k\ln k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2.$

**2)** On veut $1 - k + k\ln k = \frac{1}{2}$ ce qui est possible. Il suffit d'étudier la fonction et d'appliquer le TVI.

**Exercice 3.**

Soit $T$ le nombre de haies renversées et $Y$ le temps total de parcours. On a $T \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{10})$ et $Y = X + 0,2T$.

On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements $(T = k)_{1 \leq k \leq 10}$.

$$\begin{aligned}
p(Y \leq 12,8) &= \sum_{k=0}^{10} p_{(T=k)}(Y \leq 12,8)p(T = k) = \sum_{k=0}^{10} p(X \leq 12,8 - 0,2k)p(T = k) \\
&= \sum_{k=0}^{10} \Phi\left(\frac{12,8 - 0,2k - 13,2}{0,2}\right) p(T = k) = \sum_{k=0}^{10} \Phi(-2 - k)p(T = k) \\
&= \sum_{k=0}^{10} (1 - \Phi(k + 2))p(T = k)
\end{aligned}$$

Mais en fait, au-delà de $T = 2$, il ne peut battre le record et la probabilité est nulle. On trouve donc $p(Y \leq 12,8) = \sum\limits_{k=0}^{2} (1 - \Phi(k + 2))p(T = k) \simeq 0,8$