

Variables aléatoires continues

EN2D2

Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES : Définition d'une densité et d'une fonction de répartition. Calcul de l'espérance et de la variance. Loix classiques : uniforme, exponentielle, normale.

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = x \ln^2(x).$$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

Dans la suite, on pose h la bijection réciproque de la restriction de g à l'intervalle $]1, +\infty[$.

- 2) a) Montrer que $\forall x > 0 \quad \ln h(x) + 2 \ln(\ln h(x)) = \ln x$.
 b) En déduire un équivalent simple de $h(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
 3) Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2g(x)} & \text{si } |x| < \frac{1}{e} \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Montrer qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.
 b) Possède-t-elle une espérance et si oui, la calculer.

Exercice 2. ♣

Alice et Bob jouent avec leur calculatrice. Chacun obtient un nombre aléatoire entre de l'intervalle $[0; 1]$. On imagine que les résultats sont des réels et pas nécessairement des décimaux contrairement à la réalité. Si le produit des deux nombres obtenus est inférieur ou égal à $k = \frac{1}{2}$, alors Bob gagne.

- 1) Quelle est la probabilité qu'Alice gagne?
 2) Existe-t-il une valeur de k pour que le jeu soit équitable?

Exercice 3. ♣

Un hurdler s'élance pour un 110m haies. S'il ne renverse aucune haie, il effectue son parcours en X secondes avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(13, 2; 0, 2)$. Il peut renverser chacune des dix haies avec la probabilité $\frac{1}{10}$, ce qui lui coûte 0,2 seconde à chaque fois.

Quelle est la probabilité qu'il batte le record du monde (12s80 détenu par l'américain Aries Merritt, le 7/9/2012) ?



Solutions des exercices

Exercice 2.

$$1) p = \int_k^1 \left(1 - \frac{k}{x}\right) dx = 1 - k + k \ln k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

2) On veut $1 - k + k \ln k = \frac{1}{2}$ ce qui est possible. Il suffit d'étudier la fonction et d'appliquer le TVI.

Exercice 3.

Soit T le nombre de haies renversées et Y le temps total de parcours. On a $T \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{10})$ et $Y = X + 0,2T$.

On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements $(T = k)_{1 \leq k \leq 10}$.

$$\begin{aligned} p(Y \leq 12,8) &= \sum_{k=0}^{10} p_{(T=k)}(Y \leq 12,8)p(T = k) = \sum_{k=0}^{10} p(X \leq 12,8 - 0,2k)p(T = k) \\ &= \sum_{k=0}^{10} \Phi\left(\frac{12,8 - 0,2k - 13,2}{0,2}\right)p(T = k) = \sum_{k=0}^{10} \Phi(-2 - k)p(T = k) \\ &= \sum_{k=0}^{10} (1 - \Phi(k + 2))p(T = k) \end{aligned}$$

Mais en fait, au-delà de $T = 2$, il ne peut battre le record et la probabilité est nulle. On trouve donc

$$p(Y \leq 12,8) = \sum_{k=0}^2 (1 - \Phi(k + 2))p(T = k) \simeq 0,8$$

