Programme de Khôlle $n°$14 (semaine 3)

Espaces vectoriels

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

ESPACES VECTORIELS : Définition - axiomatique. Déterminer un système générateur, une base d'un sous-espace vectoriel. Familles libres, familles liées. Somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Tout type d'espace : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercices préparatoires :

Exercice 1.
Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+2y=0\} \quad \text{et} \quad \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+y=0\}.$$

Solutions des exercices

Exercice 1.

On trouve facilement $\Delta \cap D = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ en résolvant le système $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$.

Pour montrer que $D + \Delta = \mathbb{R}^2$, on essaie de résoudre

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in D} + \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\in \Delta} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ -2x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' - 2y = X \\ y - 2x' = Y \end{cases}$$

ce qui donne $-3x' = 2Y + X$ et $-3y = Y + 2X$. Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-3} \begin{pmatrix} -4X - 2Y \\ Y + 2X \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-3} \begin{pmatrix} X + 2Y \\ -2X - 4Y \end{pmatrix}$