

Espaces vectoriels

EN2D2

Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

ESPACES VECTORIELS : Définition - axiomatique. Déterminer un système générateur, une base d'un sous-espace vectoriel. Familles libres, familles liées. Somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Tout type d'espace : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Applications linéaires. Définition, détermination du noyau, de l'image. Théorème du rang.

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y = 0\} \quad \text{et} \quad \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 0\}.$$

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On définit φ sur E par $\varphi(u) = v$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n + 1}.$$

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- 2) Montrer que φ est bijective de E dans E et déterminer φ^{-1} .
- 3) Déterminer $\text{Ker}(\varphi - \frac{1}{2} \text{Id}_E)$.
- 4) Soit F l'ensemble des suites croissantes éléments de E . Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?
- 5) Montrer que F est stable par φ ?



Solutions des exercices

Exercice 1.

On trouve facilement $\Delta \cap D = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ en résolvant le système $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$.

Pour montrer que $D + \Delta = \mathbb{R}^2$, on essaie de résoudre

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in D} + \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\in \Delta} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ -2x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 2y = X \\ y - 2x' = Y \end{cases}$$

ce qui donne $-3x' = 2Y + X$ et $-3y = Y + 2X$. Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -4X - 2Y \\ Y + 2X \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} X + 2Y \\ -2X - 4Y \end{pmatrix}$

Exercice 2.

1) Il est clair qu'ainsi défini, (v_n) est une suite réelle, donc un élément de E . Voyons si l'application est linéaire.

Soient $(u, u') \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda u + \mu u' = (\lambda u_n + \mu u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$\begin{aligned} (\varphi(\lambda u + \mu u'))_n &= \frac{(\lambda u_0 + \mu u'_0) + (\lambda u_1 + \mu u'_1) + \dots + (\lambda u_n + \mu u'_n)}{n+1} = \\ &= \lambda \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} + \mu \frac{u'_0 + u'_1 + \dots + u'_n}{n+1} = \lambda(\varphi(u))_n + \mu(\varphi(u'))_n. \end{aligned}$$

Donc φ est un endomorphisme.

2) L'espace E étant de dimension infinie, on ne peut utiliser le théorème du rang comme à l'accoutumée.

Injectivité : Si $(v_n) = (0)$, alors on cherche les (u_n) telles que $\varphi(u) = 0_E$. Soit à résoudre $\frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En fait, on procède à une récurrence triviale : au rang 0, $\frac{u_0}{0+1} = 0 \Leftrightarrow u_0 = 0$. Au rang 2 : $\frac{u_0 + u_1}{2} = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0$ car $u_0 = 0$ et ainsi de suite. Donc $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Surjectivité : Soit (v_n) une suite donnée. On construit (u_n) , son antécédent de la façon suivante, pas à pas : $u_0 = v_0$, $u_1 = 2v_1 - u_0$, $\dots$, $u_n = (n+1)v_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Donc φ est un automorphisme.

3) On écrit les premières équations du système infini à résoudre :

$$\begin{aligned} u_0 - \frac{1}{2}u_0 &= 0 \Leftrightarrow u_0 = 0, \\ \frac{u_0 + u_1}{2} - \frac{u_1}{2} &\Leftrightarrow u_1 \text{ quelconque} \\ \frac{u_0 + u_1 + u_2}{3} - \frac{u_2}{2} &= 0 \Leftrightarrow u_2 = 2u_1 \\ \frac{u_0 + u_1 + u_2 + u_3}{4} - \frac{u_3}{2} &= 0 \Leftrightarrow 2u_3 = 2u_1 + 2u_2 \Leftrightarrow u_3 = 3u_1 \end{aligned}$$

Plus généralement, $2(u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) = (n-1)u_n$ (récurrence triviale).

En fait, on remarque que $u_n = nu_1$ et en remplaçant dans l'égalité précédente, on prouve l'hérédité

$$2(u_1 + 2u_1 + \dots + (n-1)u_1) = (n-1)u_n \Leftrightarrow 2u_1 \frac{(n-1)n}{2} = (n-1)u_n \Leftrightarrow u_n = nu_1.$$

Ainsi, $(u_n) \in \text{Ker}(\varphi - \frac{1}{2} \text{Id}_E) \Leftrightarrow u_n = nu_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $\text{Ker}(\varphi - \frac{1}{2} \text{Id}_E) = \text{Vect}((n)_{n \in \mathbb{N}})$, la suite des entiers naturels.

4) Non car si (u_n) est croissante strictement, alors $(-u_n)$ n'est pas croissante.

5) Il faut montrer que (v_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_0 + \dots + u_{n+1}}{n+2} - \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1} = (n+1)u_{n+1} - u_0 - u_1 - \dots - u_n = \sum_{k=0}^n (u_{n+1} - u_k)$$

Mais comme (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} \geq u_n \geq \dots \geq u_1 \geq u_0$. Donc $u_{n+1} - u_k \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

