Programme de Khôlle $n°$18 (semaine 7)

Espaces vectoriels - Matrices - Déterminants

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

ESPACES VECTORIELS : Définition - axiomatique. Déterminer un système générateur, une base d'un sous-espace vectoriel. Familles libres, familles liées. Somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Tout type d'espace : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Applications linéaires. Définition, détermination du noyau, de l'image. Théorème du rang.

MATRICES : Déterminer une matrice associée à une application linéaire. Calculs matriciels. Calcul du rang, de la transposée, de l'inverse, de la puissance $n^{\text{ième}}$.

DETERMINANTS : Tout type de calcul.

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+2y=0\} \quad \text{et} \quad \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+y=0\}.$$

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On définit φ sur E par $\varphi(u) = v$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2) Montrer que φ est bijective de E dans E et déterminer φ^{-1}.
3) Déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{Id}_E)$.
4) Soit F l'ensemble des suites croissantes éléments de E. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?
5) Montrer que F est stable par φ ?

Exercice 3.

Soit f l'application linéaire liée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Préciser les espaces de départ et d'arrivée de f. Exprimez $f(x,y,z)$.
2) Déterminer le rang de f, une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
3) On considère le système de deux équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} X + 2Y - T = 0 \\ X + Y - Z = 0 \end{cases}.$$

On note S l'ensemble des solutions de ce système. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.
4) Montrer que $\operatorname{Im} f = S$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

On trouve facilement $\Delta \cap D = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ en résolvant le système $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$.

Pour montrer que $D + \Delta = \mathbb{R}^2$, on essaie de résoudre

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in D} + \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\in \Delta} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ -2x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' - 2y = X \\ y - 2x' = Y \end{cases}$$

ce qui donne $-3x' = 2Y + X$ et $-3y = Y + 2X$. Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-3} \begin{pmatrix} -4X - 2Y \\ Y + 2X \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-3} \begin{pmatrix} X + 2Y \\ -2X - 4Y \end{pmatrix}$

Exercice 2.

1) Il est clair qu'ainsi défini, (v_n) est une suite réelle, donc un élément de E. Voyons si l'application est linéaire.

Soient $(u, u') \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda u + \mu u' = (\lambda u_n + \mu u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$(\varphi(\lambda u + \mu u'))_n = \frac{(\lambda u_0 + \mu u'_0) + (\lambda u_1 + \mu u'_1) + \cdots + (\lambda u_n + \mu u'_n)}{n+1} =$$
$$\lambda \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} + \mu \frac{u'_0 + u'_1 + \cdots + u'_n}{n+1} = \lambda(\varphi(u))_n + \mu(\varphi(u'))_n.$$

Donc φ est un endomorphisme.

2) L'espace E étant de dimension infinie, on ne peut utiliser le théorème du rang comme à l'accoutumée.

<u>Injectivité :</u> Si $(v_n) = (0)$, alors on cherche les (u_n) telles que $\varphi(u) = 0_E$. Soit à résoudre $\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En fait, on procède à une récurrence triviale : au rang 0, $\dfrac{u_0}{0+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = 0$. Au rang 2 : $\dfrac{u_0 + u_1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 0$ car $u_0 = 0$ et ainsi de suite. Donc $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Surjectivité :</u> Soit (v_n) une suite donnée. On construit (u_n), son antécédent de la façon suivante, pas à pas : $u_0 = v_0$, $u_1 = 2v_1 - u_0$, $\ldots u_n = (n+1)v_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

Donc φ est un automorphisme.

3) On écrit les premières équations du système infini à résoudre :

$$\begin{aligned} u_0 - \tfrac{1}{2}u_0 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad u_0 = 0, \\ \frac{u_0 + u_1}{2} - \frac{u_1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad u_1 \text{ quelconque} \\ \frac{u_0 + u_1 + u_2}{3} - \frac{u_2}{2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad u_2 = 2u_1 \\ \frac{u_0 + u_1 + u_2 + u_3}{4} - \frac{u_3}{2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2u_3 = 2u_1 + 2u_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_3 = 3u_1 \end{aligned}$$

Plus généralement, $2(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}) = (n-1)u_n$ (récurrence triviale).

En fait, on remarque que $u_n = nu_1$ et en remplaçant dans l'égalité précédente, on prouve l'hérédité

$$2(u_1 + 2u_1 + \ldots (n-1)u_1) = (n-1)u_n \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{2}u_1 \frac{\cancel{(n-1)}n}{\cancel{2}} = \cancel{(n-1)}u_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = nu_1.$$

Ainsi, $(u_n) \in \operatorname{Ker}(\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{Id}_E) \Leftrightarrow u_n = nu_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $\operatorname{Ker}(\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}((n)_{n\in\mathbb{N}})$, la suite des entiers naturels.

4) Non car si (u_n) est croissante strictement, alors $(-u_n)$ n'est pas croissante.

5) Il faut montrer que (v_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_{n+1}}{n+2} - \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} = (n+1)u_{n+1} - u_0 - u_1 - \cdots - u_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k)$$

Mais comme (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} \geq u_n \geq \cdots \geq u_1 \geq u_0$. Donc $u_{n+1} - u_k \geq 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

Exercice 3.

1) Par définition, la dimension de l'espace de départ est 3 et celle de l'espace d'arrivée est 4. Donc $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

On a $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ x+z \\ x+y+2z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$

2) On remarque que la colonne 1 additionnée à la colonne 2 donne la colonne 3. Donc en notant (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$, on a $f(e_1) + f(e_2) = f(e_3)$. Ainsi, $\operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ et comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, il s'agit d'une base de l'image et $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = 2$.

Pour le noyau, on peut chercher à résoudre le système comme d'hab, mais il y a plus futé. Le théorème du rang nous fournit la dimension de l'espace cherché :

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim R^3 - \dim \operatorname{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1.$$

En reprenant la relation trouvée précédemment, on a $f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$ et par linéarité, $f(e_1 + e_2 - e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$. Ainsi $e_1 + e_2 - e_3 \in \operatorname{Ker} f$ et comme le noyau est de dimension 1, il est engendré par ce vecteur.

Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$.

3) Aucune difficulté pour montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

On obtient

$$\begin{aligned}
(X,Y,Z,T) \in S \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X + 2Y - T = 0 \\ X + Y - Z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T = X + 2Y \\ Z = X + Y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\\X+Y\\X+2Y\end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\T\end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où S de dimension 2 engendré par les deux derniers vecteurs car ils sont indépendants.

4) Il suffit de montrer que les deux vecteurs $u = (1,0,1,1)$ et $v = (0,1,1,2)$ sont dans l'image de f. Or ce sont précisément les images de e_1 et de e_2.