Programme de Khôlle $n°$20 (semaine 11)

Matrices - Diagonalisation

EN2D2 Thierry Sageaux, Lycée Gustave Eiffel.

MATRICES : Déterminer une matrice associée à une application linéaire. Calculs matriciels. Calcul du rang, de la transposée, de l'inverse, de la puissance $n^{\text{ième}}$.

DETERMINANTS : Tout type de calcul.

DIAGONALISATION : Changement de base, matrices semblables, valeurs propres, vecteurs propres. Diagonalisation, élévation à une puissance.

Exercices préparatoires :

Exercice 1.

Soit f l'application linéaire liée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Préciser les espaces de départ et d'arrivée de f. Exprimez $f(x,y,z)$.

2) Déterminer le rang de f, une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

3) On considère le système de deux équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} X + 2Y - T = 0 \\ X + Y - Z = 0 \end{cases}.$$

On note S l'ensemble des solutions de ce système. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.

4) Montrer que $\operatorname{Im} f = S$.

Exercice 2.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique (e_i) est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose une nouvelle famille $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$.

1) Montrer que la famille (e'_i) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer directement la matrice de f dans la base (e'_i) (sans utiliser de matrice de passage).

3) Exprimer la matrice de passage P de (e_i) dans (e'_i) et calculer P^{-1}.

4) Retrouver alors le résultat de la question 2.

5) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1) Par définition, la dimension de l'espace de départ est 3 et celle de l'espace d'arrivée est 4. Donc $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

On a $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ x+z \\ x+y+2z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$

2) On remarque que la colonne 1 additionnée à la colonne 2 donne la colonne 3. Donc en notant (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$, on a $f(e_1) + f(e_2) = f(e_3)$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ et comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, il s'agit d'une base de l'image et $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\, f = 2$.

Pour le noyau, on peut chercher à résoudre le système comme d'hab, mais il y a plus futé. Le théorème du rang nous fournit la dimension de l'espace cherché :

$$\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim R^3 - \dim \mathrm{Im}\, f \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathrm{Ker}\, f = 3 - 2 = 1.$$

En reprenant la relation trouvée précédemment, on a $f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$ et par linéarité, $f(e_1 + e_2 - e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$. Ainsi $e_1 + e_2 - e_3 \in \mathrm{Ker}\, f$ et comme le noyau est de dimension 1, il est engendré par ce vecteur.

Donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$.

3) Aucune difficulté pour montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

On obtient

$$\begin{aligned}
(X,Y,Z,T) \in S \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X + 2Y - T = 0 \\ X + Y - Z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T = X + 2Y \\ Z = X + Y \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ X+Y \\ X+2Y \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où S de dimension 2 engendré par les deux derniers vecteurs car ils sont indépendants.

4) Il suffit de montrer que les deux vecteurs $u = (1,0,1,1)$ et $v = (0,1,1,2)$ sont dans l'image de f. Or ce sont précisément les images de e_1 et de e_2.

Exercice 2.

2) Il suffit de calculer $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = 2e'_2$ et $f(e'_3) = 3e'_3$. D'où la matrice diagonale :

$$B = \mathrm{Mat}_{e'_i}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) On trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Il suffit de vérifier par le calcul que $A = PBP^{-1}$.

5) On trouve $A^n = PB^nP^{-1}$ avec la ruse classique du $PP^{-1} = I$. Et comme B est diagonale,

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 - 2^n + 3^n & 1 - 2^n & 1 - 2 \times 2^n + 3^n \\ 1 - 3^n & 1 & 1 - 3^n \\ -1 + 2^n & -1 + 2^n & -1 + 2 \times 2^n \end{pmatrix}$$